

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

PDB Orde Pertama

Resmawan

UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

September 2018

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

- Banyak persamaan diferensial yang tidak dapat diubah secara langsung ke persamaan diferensial variabel terpisah.
- Kondisi seperti ini mengharuskan kita mereduksi persamaan diferensial ke bentuk variabel terpisah dengan cara mengubah variabel yang sesuai.
- Selanjutnya kita perhatikan bentuk khusus persamaan diferensial yang didefinisikan berikut.

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Definition

Suatu persamaan diferensial

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$$

dikatakan **homogen** jika $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ adalah homogen berderajat sama, atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

Sementara itu, sifat homogenitas fungsi f dan g dapat diketahui melalui definisi berikut.

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Definition

Suatu fungsi $f(x, y)$ dikatakan **homogen berderajat nol** jika

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

untuk semua nilai positif dari λ dengan $(\lambda x, \lambda y)$ dalam domain dari f . Secara umum, $f(x, y)$ dikatakan **homogen berderajat n** jika terdapat λ sedemikian sehingga

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Examples

Fungsi

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy + y^2}$$

adalah homogen berderajat *nol* sebab

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{2\lambda x \lambda y + (\lambda y)^2} \\ &= \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{2\lambda^2 xy + \lambda^2 y^2} \\ &= \frac{\lambda^2 (x^2 - y^2)}{\lambda^2 (2xy + y^2)} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Examples

- Tunjukkan bahwa fungsi berikut, homogen berderajat 3

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y^3$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Examples

- Tunjukkan bahwa fungsi berikut, homogen berderajat 3

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y^3$$

- **Solusi**

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 - 2(\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda y)^3 \\ &= \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 xy^2 + \lambda^3 y^3 \\ &= \lambda^3 (x^3 - 2xy^2 + y^3) \\ &= \lambda^3 f(x, y) \end{aligned}$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Examples

- Tunjukkan bahwa fungsi berikut, homogen berderajat 3

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y^3$$

- **Solusi**

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 - 2(\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda y)^3 \\ &= \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 xy^2 + \lambda^3 y^3 \\ &= \lambda^3 (x^3 - 2xy^2 + y^3) \\ &= \lambda^3 f(x, y) \end{aligned}$$

- Selanjutnya tunjukkan bahwa fungsi berikut tidak homogen:

$$f(x, y) = yx^3 - 2x^3y^3 + y^3$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Definition

Jika $f(x, y)$ homogen berderajat nol, maka persamaan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dinamakan **Persamaan Diferensial Biasa Homogen Orde Satu**.

- Secara umum, jika

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

merupakan PDB Homogen Orde Satu, maka kita **tidak dapat menyelesaikannya** secara langsung.

- Kita perlu melakukan transformasi pada variabel yang sesuai.
- Berikut ini adalah langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Homogen.

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Persamaan diferensial homogen dapat diselesaikan dengan mengikuti langkah-langkah berikut ini:

- 1 Gunakan transformasi berikut untuk mereduksi persamaan diferensial ke bentuk variabel terpisah:

$$y = ux, \text{ sehingga } dy = x du + u dx$$

atau

$$x = vy, \text{ sehingga } dx = y dv + v dy$$

- 2 Gunakan aturan PD variabel terpisah untuk menemukan solusi umum PD.
- 3 Substitusikan kembali variabel $u = y/x$ jika menggunakan transformasi $y = ux$ atau $v = x/y$ jika menggunakan transformasi $x = vy$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Examples

Carilah solusi dari persamaan diferensial berikut:

$$① \quad (4x^2 - 3y^2) dx + 4xy dy = 0$$

$$② \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 e^{-(y/x)} + y^2}{xy}; \quad y(1) = 0$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Solution

- ① Misal $f(x, y) = 4x^2 - 3y^2$ dan $g(x, y) = 4xy$
maka

$$\begin{aligned}f(\lambda x, \lambda y) &= 4\lambda^2 x^2 - 3\lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2 (4x^2 - 3y^2) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \\ g(\lambda x, \lambda y) &= 4\lambda x \lambda y \\ &= \lambda^2 4xy \\ &= \lambda^2 g(x, y)\end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan ini merupakan PD homogen berderajat dua.

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Solution

1 Substitusi

$$y = ux \quad \text{dan} \quad dy = udx + xdu$$

ke persamaan diferensial awal, diperoleh

$$(4x^2 - 3(ux)^2) dx + 4xux (udx + xdu) = 0$$

$$(4x^2 - 3u^2x^2) dx + 4x^2u (udx + xdu) = 0$$

$$(4 - 3u^2) dx + 4u (udx + xdu) = 0$$

$$(4 - 3u^2) dx + 4u^2 dx + 4uxdu = 0$$

$$(4 + u^2) dx + 4uxdu = 0$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Solution

- 1 Kalikan dengan faktor integrasi

$$\frac{1}{x(4+u^2)}$$

diperoleh

$$\frac{1}{x(4+u^2)} [(4+u^2) dx + 4uxdu] = 0$$

$$\frac{1}{x} dx + \frac{4u}{4+u^2} du = 0$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Solution

- ① Dengan mengintegrasikan kedua sisi, diperoleh

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{4u}{4 + u^2} du = k$$

$$\ln x + \ln (4 + u^2)^2 = k$$

$$\ln x (4 + u^2)^2 = k$$

$$x (4 + u^2)^2 = C; \quad C = e^k$$

Substitusi kembali $u = y/x$, maka diperoleh solusi umum PD

$$x \left(4 + \frac{y^2}{x^2} \right)^2 = C$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Solution

2. Tulis kembali PD dalam bentuk

$$\left(x^2 e^{-(y/x)} + y^2\right) dx - xy dy = 0$$

Misal $f(x, y) = x^2 e^{-(y/x)} + y^2$ dan $g(x, y) = xy$
maka

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 e^{-(\lambda y/\lambda x)} + \lambda^2 y^2$$

$$= \lambda^2 \left(x^2 e^{-(y/x)} + y^2\right)$$

$$= \lambda^2 f(x, y)$$

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y$$

$$= \lambda^2 xy$$

$$= \lambda^2 g(x, y)$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Solution

2. Substitusi

$$y = ux \quad \text{dan} \quad dy = udx + xdu$$

ke persamaan diferensial awal, diperoleh

$$\left(x^2 e^{-(ux/x)} + u^2 x^2 \right) dx - ux^2 (udx + xdu) = 0$$

$$(x^2 e^{-u} + u^2 x^2) dx - u^2 x^2 dx - ux^3 du = 0$$

$$x^2 e^{-u} dx + u^2 x^2 dx - u^2 x^2 dx - ux^3 du = 0$$

$$x^2 e^{-u} dx - ux^3 du = 0$$

$$e^{-u} dx - ux du = 0$$

$$\frac{1}{x} dx - ue^u du = 0$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Solution

2. Dengan mengintegrasikan kedua sisi, diperoleh

$$\int \frac{1}{x} dx - \int ue^u du = k$$

$$\ln x - (ue^u - e^u) = k$$

$$\ln x - (u - 1)e^u = k$$

Substitusi kembali $u = y/x$, maka diperoleh solusi umum PD

$$\ln x - \left(\frac{y}{x} - 1\right) e^{y/x} = k$$

2.5 Persamaan Diferensial Homogen

Solution

2. Untuk menemukan solusi khusus, gunakan nilai awal $y(1) = 0$ diperoleh

$$k = 1$$

sehingga diperoleh solusi khusus PD

$$\ln x - \left(\frac{y}{x} - 1\right) e^{y/x} = 1$$

* Soal-Soal Latihan 3

Latihan 3

* Soal-Soal Latihan 3

Problem

Tentukan solusi dari persamaan diferensial berikut

$$① \quad y' = y + xe^{y/x}$$

$$② \quad y(y + xe^{x/y}) dx - x^2 e^{x/y} dy = 0$$

$$③ \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{x}{y \ln(x/y)}$$

$$④ \quad x \frac{dy}{dx} = y + x \sec(y/x)$$

$$⑤ \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy(1 + e^{x/y})}{x^2(1 + e^{x/y})}; \quad y(1) = 1$$

$$⑥ \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+4y}; \quad y(1) = 1$$

$$⑦ \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2(2y-x)}{x+y}; \quad y(0) = 2$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "