KALKULUS LANJUT

Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

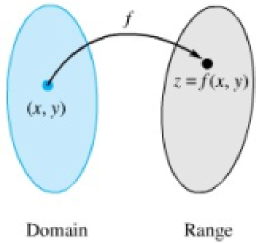
27 Agustus 2018

1.1 Definisi Fungsi Dua Variabel

Definition

Fungsi Dua Variabel didefinisikan sebagai sebuah fungsi bernilai real dari dua variabel real, yakni fungsi f yang memadankan setiap pasangan terurut (x, y) pada suatu himpunan D dari bidang dengan bilangan real tunggal $f(x, y)$.

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar berikut



1.1 Definisi Fungsi Dua Variabel

Example

Berikut diberikan beberapa contoh fungsi dengan dua variabel

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + 3y^2 \\ g(x,y) &= 2x\sqrt{y} \end{aligned}$$

- Perhatikan bahwa $f(-1,4) = (-1)^2 + 3(4)^2 = 49$ dan $g(-1,4) = 2(-1)\sqrt{4} = -4$.
- Himpunan D disebut sebagai **Daerah Asal** fungsi, disebut sebagai daerah asal alami (*natural domain*) jika tidak dinyatakan secara khusus, yaitu himpunan semua titik (x, y) pada suatu bidang dimana fungsi tersebut bermakna dan menghasilkan nilai bilangan real.
- Daerah asal alami fungsi nomor 1 adalah seluruh bidang, sementara daerah asal alami fungsi nomor 2 adalah $\{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ y \geq 0\}$.

1.1 Definisi Fungsi Dua Variabel

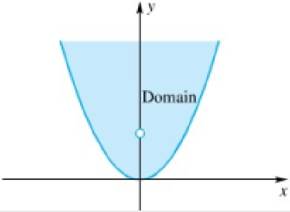
Example

Sketsalah daerah asal alami untuk

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{x^2+(y-1)^2}$$

Solution

Daerah asal alami agar fungsi ini bermakna adalah seluruh bidang diluar $\{(x,y) : x^2 \leq y\}$ *dan titik* $(0,1)$*. Dalam bentuk sketsa dinyatakan sebagai berikut:*



1.1 Definisi Fungsi Dua Variabel

Example

Sketsalah grafik fungsi berikut

$$f(x, y) = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$$

Solution

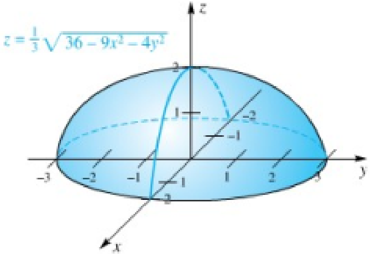
Misal $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ *dan perhatikan bahwa* $z \geq 0$*. Jika kedua ruas dikuadratkan dan disederhanakan, maka diperoleh persamaan elipsoida*

$$9x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$$

1.1 Definisi Fungsi Dua Variabel

Solution

Grafik fungsi ditunjukkan sebagai berikut:



1.1 Definisi Fungsi Dua Variabel

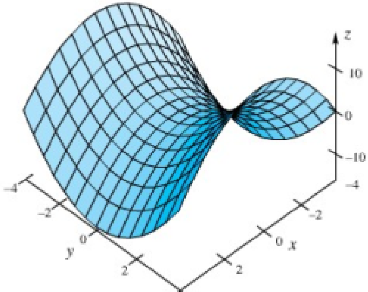
Example

Sketsalah grafik fungsi berikut

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2$$

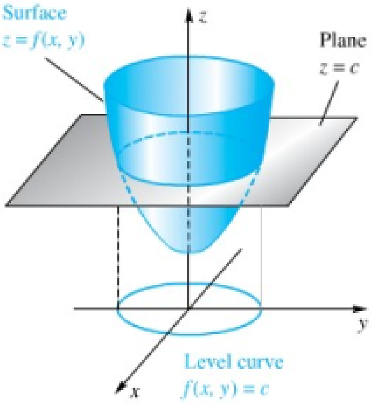
Solution

Sketsa grafik merupakan sebuah paraboloida



1.2 Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

- Untuk memudahkan sketsa grafik fungsi $z = f(x, y)$,diberikan bidang mendatar $z = c$ yang memotong permukaan kurva.



1.2 Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

- Proyeksi kurva ini pada bidang-xy disebut **Kurva Ketinggian** sedangkan kumpulan kurva-kurva yang demikian disebut **Peta Kontur.**

Example

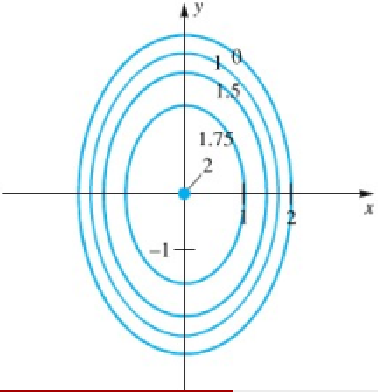
Gambar peta kontur untuk permukaan yang berpadanan dengan dua fungsi berikut

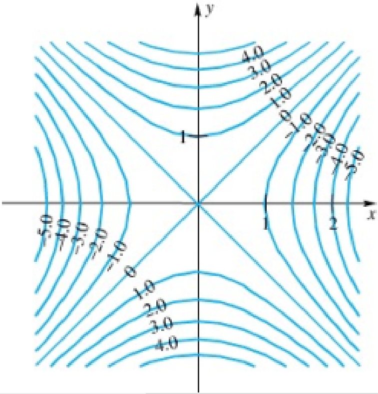
$$z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \quad \text{dan} \quad z = y^2 - x^2.$$

1.2 Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

Solution

Kurva-kurva ketinggian dari $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ *berpadanan dengan* $z = 0;\ 1;\ 1.5;\ 1.75;\ 2$ *dan* $z = y^2 - x^2$ *yang berpadanan dengan* $z = -5; -4; \ldots; 3; 4$ *masing-masing diperlihatkan pada gambar berikut*





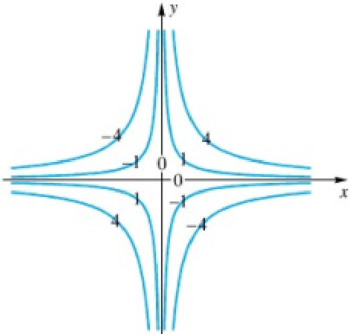
1.2 Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

Example

Sketsa peta kontur untuk fungsi

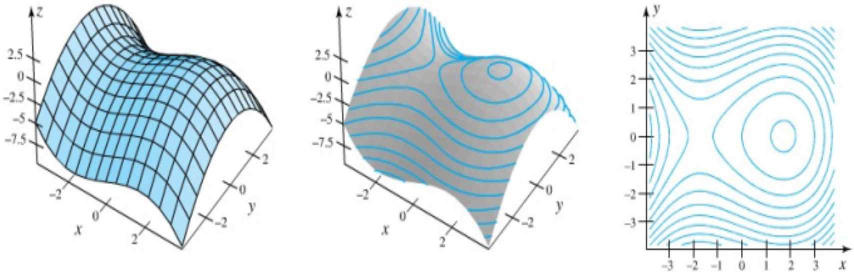
$$z = f(x, y) = xy$$

yang berpadanan dengan nilai $z = -4, -1, 0, 1, 4$



1.3 Grafik Komputer Kurva Ketinggian

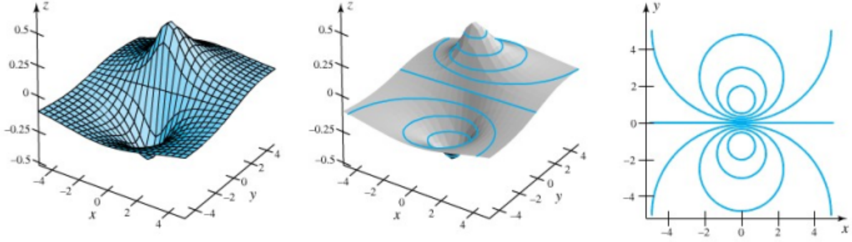
- Gambar-gambar berikut memperlihatkan perpadanan antara permukaan, grafik ketinggian dan peta kontur.
- Perhatikan bahwa kita memutar bidang$-xy$ sehingga sumbu$-x$ menuju ke kanan, agar lebih mudah untuk menghubungkan permukaan dan kurva-kurva ketinggian



$$z = x - \left(\tfrac{1}{9}\right)x^3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)y^2 \quad \begin{cases} -3.8 \le x \le 3.8 \\ -3.8 \le y \le 3.8 \end{cases}$$

Figure 15

1.3 Grafik Komputer Kurva Ketinggian



$$z = \frac{y}{(1 + x^2 + y^2)} \qquad \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ -5 \le y \le 5 \end{cases}$$

Figure 16

1.3 Grafik Komputer Kurva Ketinggian

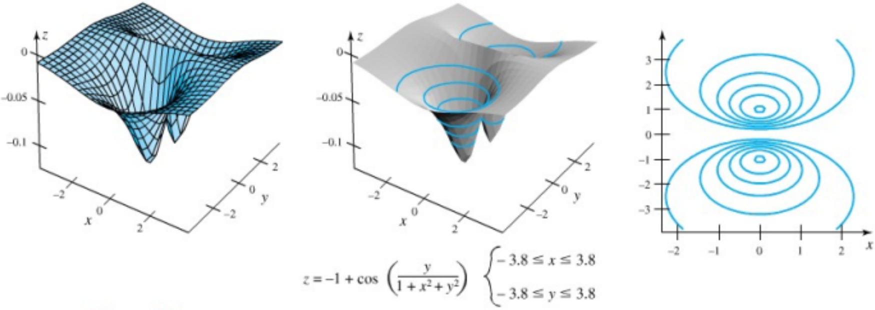


Figure 17

1.4 Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

- Beberapa kondisi terkadang ditentukan oleh tiga variabel atau lebih, sehingga menghasilkan suatu fungsi dengan tiga atau lebih variabel.
- Misalnya suhu disuatu ruangan yang dipengaruhi oleh lokasi (x, y, z) sehingga menghasilkan fungsi $T(x, y, z)$
- Kecepatan fluida yang dipengaruhi oleh lokasi (x, y, z) selain waktu t sehingga menghasilkan fungsi $V(x, y, z, t)$
- Nilai rata-rata ujian 30 mahasiswa yang dipengaruhi oleh masing-masing nilai mahasiswa $(x_1, x_2, ..., x_{30})$ sehingga menghasilkan fungsi $N(x_1, x_2, ..., x_{30})$

1.4 Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Example

Carilah daerah asal untuk masing-masing fungsi berikut dan jelaskan permukaan-permukaan ketinggian untuk f.

$$\begin{aligned} 1)\ f(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2-1} \\ 2)\ g(w,x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2-1}} \end{aligned}$$

1.4 Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Solution

1. *Untuk menghindari akar bilangan negatif, maka bilangan terurut* (x, y, z) *harus memenuhi* $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$*, sehingga daerah asal fungsi* f *terdiri dari semua titik* (z, y, z) *yang terletak pada atau diluar lingkaran satuan.*
   Permukaan ketinggian dari fungsi f *adalah permukaan di ruang tiga yang memenuhi* $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} = c$ *selama* $c \geq 0$*. Hubungan ini menuju ke* $x^2 + y^2 + z^2 = c + 1$*, sebuah bola yang berpusat di titik asal* $(0, 0, 0)$*.*
2. *Bilangan terurut* (w, x, y, z) *harus memenuhi* $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 > 1$ *untuk menghindari akar bilangan negatif dan pembagian oleh* 0*.*

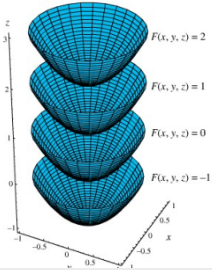
1.4 Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Example

Misalkan $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. Jelaskan permukaan ketinggian untuk F dan plotlah permukaan ketinggian untuk $-1, 0, 1$, dan 2.

Solution

Hubungan $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = c$ *menuju ke* $z = c + x^2 + y^2$ *merupakan sebuah paraboloida yang membuka ke atas dengan puncak di* $(0, 0, c)$.



1.5 Latihan 1

Problem

Selesaikan soal-soal 12.1 pada Kalkulus Varberg, Purcell, Rigdom Edisi 9 Jilid 2:

1. *Nomor 2*
2. *Nomor 8,10,14,16*
3. *Nomor 18,20,22*
4. *Nomor 39*
5. *Nomor 40*

2.1 Definisi Turunan Parsial

Definition

Misalkan f fungsi dua variabel x dan y. Jika y dijaga agar tetap konstan, katakanlah $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi satu variabel x. Turunannya di $x = x_0$ disebut **Turunan Parsial** f **terhadap** x di (x_0, y_0) dan dinyatakan oleh $f_x(x_0, y_0)$, dengan notasi

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Dengan cara yang sama, turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan oleh $f_y(x_0, y_0)$ dengan notasi

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

2.1 Definisi Turunan Parsial

Example

Carilah $f_x(1,2)$ dan $f_y(1,2)$ jika $f(x,y) = x^2y + 3y^3$

Solution

Untuk mencari $f_x(x,y)$ kita perlakukan y sebagai konstan dan diturunkan terhadap x,

$$f_x(x,y) = 2xy + 0$$

sehingga diperoleh

$$f_x(1,2) = 2(1)(2) = 4$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$f_y(x,y) = x^2 + 9y^2$$

sehingga

$$f_y(1,2) = 1^2 + 9(2)^2 = 37$$

2.1 Definisi Turunan Parsial

Jika $z = f(x, y)$, turunan parsial dapat dinyatakan dengan notasi lain sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ f_y(x, y) &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Notasi $\frac{\partial}{\partial x}$ dan $\frac{\partial}{\partial y}$ disebut operator linear yang memiliki fungsi setara dengan operator D_x dan $\frac{d}{dx}$ yang kita jumpai pada turunan fungsi satu variabel.

2.1 Definisi Turunan Parsial

Example

Jika $z = x^2 \sin(xy^2)$, carilah $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solution

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= x^2 y^2 \cos(xy^2) + 2x \sin\left(xy^2\right) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 \cos(xy^2).2xy \\
&= 2x^3 y \cos(xy^2)
\end{aligned}
$$

2.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Secara umum karena turunan parsial suatu fungsi x dan y adalah fungsi lain dari dua variabel yang sama ini, maka turunan tersebut dapat dideferensialkan secara parsial terhadap x dan y, yang menghasilkan empat buah turunan parsial kedua dari fungsi f :

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
f_{xy} &= (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
f_{yx} &= (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

2.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Example

Carilah keempat turunan parsial kedua dari

$$f(x, y) = xe^y - \sin\frac{x}{y} + x^3y^2$$

Solution

Berdasarkan fungsi yang diberikan, diperoleh masing-masing turunan parsial pertama

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^y + 3x^2y^2 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} \\ f_y(x, y) &= xe^y + 2x^3y + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} \end{aligned}$$

2.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Solution

Sehingga diperoleh turunan parsial

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y} + 3x^2y^2 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right) = 6xy^2 + \frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y} \\
f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{y} + 2x^3y + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right) \\
&= xe^{y} + 2x^3 + \frac{x^2}{y^4}\sin\frac{x}{y} - \frac{2x}{y^3}\cos\frac{x}{y} \\
f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y} + 3x^2y^2 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right) \\
&= e^{y} + 6x^2y - \frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} \\
f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{y} + 2x^3y + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right) = e^{y} + 6x^2y - \frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}
\end{aligned}
$$

2.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

- Turunan parsial tingkat tiga dan seterusnya dapat didefinisikan dengan cara yang sama dengan notasi yang serupa.
- Jika turunan parsial ketiga dari suatu fungsi $f(x, y)$ diperoleh dari turunan parsial pertama terhadap x lalu turunan parsial kedua terhadap y,maka notasinya ditunjukkan oleh

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial yx}\right) = \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} = f_{xyy}$$

Example

Carilah masing-masing f_{xyy} dan f_{xxy} dari fungsi

$$f(x, y) = xe^y - \sin\frac{x}{y} + x^3y^2$$

2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Definition

Misalkan f suatu fungsi tiga variabel x, y, dan z. **Turunan Parsial** f **terhadap** x di (x, y, z) dinyatakan oleh $f_x(x, y, z)$ atau $\partial f(x, y, z)/\partial x$ dan didefinisikan oleh

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

- Dengan demikian $f_x(x, y, z)$ dapat diperoleh dengan memperlakukan y dan z sebagai konstanta dan menurunkan f terhadap x.
- Turunan parsial terhadap y dan z dapat dilakukan dengan cara yang sama.
- Selanjutnya turunan parsial seperti f_{xy} dan f_{xyz} yang melibatkan diferensiasi terhadap lebih dari satu variabel disebut **Turunan Parsial Campuran.**

2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Example

Hitunglah masing-masing turunan parsial f_x, f_y,dan f_z jika diberikan fungsi

$$f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$$

2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Solution

Untuk memperoleh f_x, perlakukan y dan z sebagai konstanta, sehingga

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$f_y(x, y, z) = x + 2z$$

dan

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Example

Jika diberikan fungsi

$$T\left(w, x, y, z\right) = ze^{w^2+x^2+y^2}$$

1. Hitunglah semua turunan parsial pertama
2. Hitung turunan parsial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial w \partial x}, \; \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial w}, \; dan \; \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Solution

1. *Turunan Parsial Pertama*

$$\begin{aligned}
T_w(w,x,y,z) &= \frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 2wze^{w^2+x^2+y^2} \\
T_x(w,x,y,z) &= \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 2xze^{w^2+x^2+y^2} \\
T_y(w,x,y,z) &= \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 2yze^{w^2+x^2+y^2} \\
T_z(w,x,y,z) &= \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = e^{w^2+x^2+y^2}
\end{aligned}$$

2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Solution

2. *Turunan Parsial lainnya*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial w \partial x} &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left(2xze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 4wxze^{w^2+x^2+y^2} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial w} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(2wze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 4wxze^{w^2+x^2+y^2} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{w^2+x^2+y^2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

2.4 Latihan 2

Problem

1. *Carilah semua turunan parsial pertama dari fungsi berikut:*

   a. $f(x, y) = \left(4x - y^2\right)^{3/2}$
   b. $f(x, y) = e^x \cos y$
   c. $f(x, y) = \left(3x^2 + y^2\right)^{-1/2}$
   d. $f(u, v) = e^{uv}$
   e. $f(s, t) = \ln\left(s^2 - t^2\right)$
   f. $f(r, \theta) = 3r^2 \cos 2\theta$

2. *Tunjukkan bahwa*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

   a. $f(x, y) = \tan^{-1} xy$
   b. $f(x, y) = 3e^{2x} \cos y$
   c. $f(x, y) = \left(x^3 + y^2\right)^5$

2.4 Latihan 2

Problem

3. *Hitung turunan parsial masing-masing fungsi yang diberikan*
   a. $F_x(-1,4)$ *dan* $F_y(-1,4)$ *dari fungsi* $F(x,y) = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$
   b. $f_x\left(\sqrt{5},-2\right)$ *dan* $f_y\left(\sqrt{5},-2\right)$ *dari fungsi* $f(x,y) = \tan^{-1}\left(y^2/x\right)$
4. *Berikan definisi dalam bentuk limit untuk turunan parsial berikut*
   a. $f_y(x,y,z)$
   b. $f_z(x,y,z)$
   c. $G_x(w,x,y,z)$
   d. $\partial/\partial z\,(x,y,z,t)$