

KALKULUS LANJUT

Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

27 Agustus 2018

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

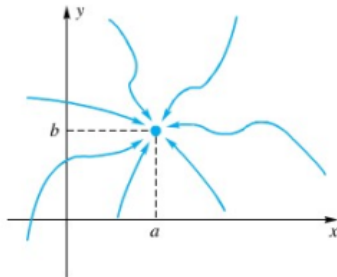
- Pada subbab ini ini kita akan memberikan arti pada pernyataan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

- Secara intuisi kalimat ini dapat dimaknai:

"Nilai $f(x,y)$ dekat ke L , jika (x,y) dekat ke (a,b) "

- Bagaimana (x,y) dekat ke (a,b) ?



3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Definition (Definisi Limit Fungsi Dua Variabel)

Dikatakan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga,

$$0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$

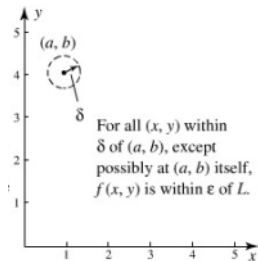
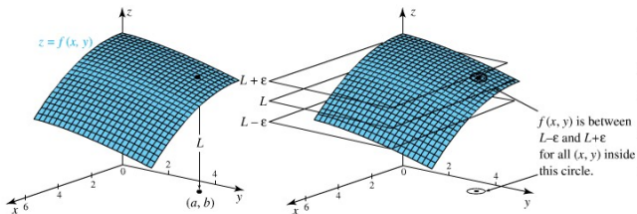
Untuk interpretasi $\|(x,y) - (a,b)\|$, pikirkan (x,y) dan (a,b) sehingga

$$\|(x,y) - (a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

dan titik-titik yang memenuhi $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$ adalah semua titik-titik dalam lingkaran berjari-jari δ kecuali titik pusat (a,b) .

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Perhatikan Gambar berikut



3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Beberapa poin yang perlu diperhatikan dari definisi limit fungsi dua variabel:

- 1 Jalur pendekatan ke (a, b) tidak penting, artinya bahwa jika jalur pendekatan yang berlainan menuju nilai-nilai L yang berlainan, maka limit tidak ada.
- 2 Perilaku $f(x, y)$ di (a, b) tidak penting, bahkan fungsi $f(x, y)$ bahkan tidak harus terdefiniskan di (a, b) , sebagai akibat dari pembatasan $0 < \|(x, y) - (a, b)\|$.
- 3 Definisi diekspresikan sedemikian sehingga dapat diperluas ke fungsi tiga variabel atau lebih, dengan mengganti (x, y) dan (a, b) dengan (x, y, z) dan (a, b, c) .

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Perhatikan bahwa, **polinomial** dengan variabel x dan y dapat dinyatakan

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x^i y^j$$

dan **fungsi rasional** dalam variabel x dan y dinyatakan dengan

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

p dan q polinomial dalam x dan y , dengan asumsi $q \neq 0$.

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Theorem

- ① Jika $f(x, y)$ adalah polinomial, maka

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

- ② Jika

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

dengan p dan q polinomial, maka

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \frac{p(a, b)}{q(a, b)}; \quad q(a, b) \neq 0$$

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Theorem

3. *Lebih lanjut, jika*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} p(x,y) = L \neq 0 \text{ dan } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} q(x,y) = 0$$

maka nilai

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

tidak ada.

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Example

Hitung limit-limit berikut jika ada

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y + 3y) \qquad 2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 - y^2}$$

Solution

1) Menurut Teorema

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y + 3y) = 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

2) Fungsi kedua adalah fungsi rasional, sehingga tidak mempunyai limit karena nilai limit penyebut sama dengan nol

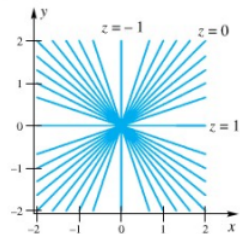
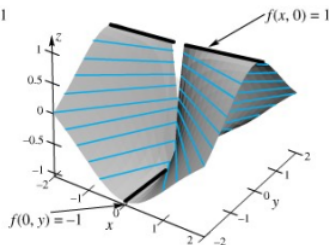
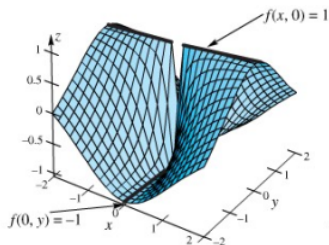
3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Example

Perlihatkan bahwa fungsi

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

tidak mempunyai limit di titik asal (perhatikan Gambar)



3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Solution

Fungsi f didefinisikan diseluruh bidang xy kecuali titik asal $(0,0)$.
Disemua titik pada sumbu- x selain titik asal, nilai f adalah

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

sehingga limit fungsi f untuk (x, y) dekat ke $(0,0)$ disepanjang sumbu- x :

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

Dengan cara yang sama, limit fungsi f untuk (x, y) dekat ke $(0,0)$ disepanjang sumbu- y :

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(0, y) = \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$$

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Examples

Carilah nilai limit yang ditunjukkan atau nyatakan bahwa limit tidak ada

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy - y^3}{(x + y + 1)^2}$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$$

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Solution

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy - y^3}{(x + y + 1)^2} = \frac{(-1)(2) - 2^3}{(-1 + 2 + 1)^2} = -\frac{5}{2}$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4} = \textit{Tidak terdefinisi karena fungsi}$$

$$= \textit{tidak terdefinisi disepanjang}$$

$$= \textit{garis } y = x$$

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\cos(x^2 + y^2)}$$

$$= (1)(1)$$

$$= 1$$

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

- Dalam kasus tertentu, limit fungsi dua variabel khususnya di titik asal dapat dianalisis dengan lebih mudah dengan mengubah fungsi ke koordinat polar.
- Dalam hal ini, poin penting yang perlu diingat bahwa

$$(x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ jika dan hanya jika } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

- Dengan ekspresi ini, limit fungsi dua variabel diekspresikan sebagai limit satu variabel r saja.

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Example

Hitunglah limit fungsi berikut, jika ada

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{3x^2 + 3y^2}$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Ingat aturan L'Hopital:

Jika

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \text{ atau } \pm \infty \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ada,}$$

Maka

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Solution

- ① Dengan mengubah ke koordinat polar dan menggunakan aturan L'Hopital, diperoleh

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{3x^2 + 3y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r^2}{3r^2} = \frac{1}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r \cos r^2}{2r} = \frac{1}{3}$$

- ② Perubahan ke koordinat polar memberikan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \ r \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \theta \ \sin \theta$$

karena limit tergantung dari θ , maka lintasan-lintasan garis lurus ke titik asal akan menuju ke limit yang berlainan. Artinya limit tidak ada untuk fungsi ini.

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Examples

Carilah nilai limit yang ditunjukkan dengan koordinat polar

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{7/3}}{x^2 + y^2}$$

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$$

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Solution

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \cdot \sin \theta = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{7/3}}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)^{7/3}}{r^2} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{7/3} (\cos \theta)^{7/3}}{r^2} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} r^{1/3} (\cos \theta)^{7/3} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$$

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Solution

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^4 \sin^4 \theta} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta} \right)
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa:

- Jika $\cos \theta = 0$, maka $f(x, y) = 0$
- Jika $\cos \theta \neq 0$, limit $f(x, y)$ konvergen ke 0 saat $r \rightarrow 0$
- Dengan demikian

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

3.3 Kontinuitas pada Suatu Titik

Definition (Kontinuitas pada Satu Titik)

Suatu fungsi $f(x, y)$ dikatakan kontinu di titik (a, b) jika memenuhi syarat

- 1 f mempunyai nilai di (a, b)
- 2 f mempunyai limit di (a, b)
- 3 Nilai f di (a, b) sama dengan nilai limitnya

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

3.3 Kontinuitas pada Suatu Titik

Theorem (Komposisi Fungsi)

Jika sebuah fungsi dua variabel g kontinu di (a, b) dan sebuah fungsi satu variabel f kontinu di (a, b) , maka fungsi komposisi $f \circ g$ yang didefinisikan oleh $(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$ kontinu di (a, b) .

Example

Jelaskan titik-titik (x, y) dimana pada titik-titik tersebut, fungsi berikut adalah kontinu

$$(1) H(x, y) = \frac{2x + 3y}{y - 4x^2}$$

$$(2) F(x, y) = \cos(x^3 - 4xy + y^2)$$

3.3 Kontinuitas pada Suatu Titik

Solution

- 1 $H(x, y)$ adalah fungsi rasional, sehingga kontinu di setiap titik tempat, kecuali titik yang menyebabkan penyebut 0. Penyebut $y - 4x^2$ sama dengan 0 di sepanjang parabola $y = 4x^2$. Dengan demikian, $H(x, y)$ kontinu untuk semua (x, y) kecuali untuk titik-titik di sepanjang parabola $y = 4x^2$.
- 2 Fungsi $g(x, y) = x^3 - 4xy + y^2$ kontinu untuk semua (x, y) karena merupakan fungsi polinomial. Fungsi $f(t) = \cos t$ juga kontinu di setiap bilangan t karena merupakan fungsi trigonometri. Dengan demikian, fungsi $F(x, y)$ kontinu untuk semua (x, y)

3.4 Latihan 3

Problem

1. Carilah limit yang ditunjukkan atau nyatakan bahwa limit tidak ada:

a.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (xy^3 - xy + 3y^2)$$

b.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{y - 2x^2}$$

c.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + \cos x}{xy - \cos x}$$

d.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$$

e.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

3.4 Latihan 3

Problem

2. Perhatikan bahwa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$$

tidak ada

3. Uraikan himpunan terbesar S yang memenuhi untuk mengatakan bahwa f kontinu

$$a. f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{y - x^2}$$

$$b. f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

$$c. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x + y}}$$

3.4 Latihan 3

Problem

4. Misalkan

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Jika $(x, y) \neq (0, 0)$ dan $f(0, 0) = 0$, perhatikan bahwa $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ dengan melengkapi langkah-langkah berikut:

- perhatikan bahwa $f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(0+h, y) - f(0, y)}{h} \right) = -y$, untuk semua y .
- perhatikan bahwa $f_y(x, 0) = x$, untuk semua x .
- perhatikan bahwa $f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_y(0+h, 0) - f_y(0, 0)}{h} \right) = 1$.
- perhatikan bahwa $f_{xy}(0, 0) = -1$.

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "