PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Persamaan Diferensian Biasa Orde n Koefisien Konstan

Resmawan

UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

November 2018

4.3 PD Linear Orde n Homogen Koefisien Konstan

4.3 PD Linear Orde n Homogen Koefisien Konstan

4.3 PD Linear Orde n Homogen Koefisien Konstan

- Perhatikan bentuk umum

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (11)$$

dimana koefisien-koefisien $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ adalah konstanta dan $a_n \neq 0$.

- Solusi umum persamaan (11) dapat diperoleh dengan pendekatan yang sama dengan PD Orde dua homogen. Andaikan basis-basis solusinya adalah

$$y = e^{\lambda x}$$

- Maka turunan-turunannya terhadap x adalah

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \cdots y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x}, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x} \qquad (12)$$

4.3 PD Linear Orde n Homogen Koefisien Konstan

- Subtitusi persamaan (12) ke persamaan (11) menghasilkan

$$\left(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right) e^{\lambda x} = 0$$

- Karena $e^{\lambda x} \neq 0$, maka

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (13)$$

yang disebut **Persamaan Karakteristik,** sehingga solusi umum diberikan oleh

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

4.3 PD Linear Orde n Homogen Koefisien Konstan

Langkah-Langkah menentukan solusi umum:

1. Menentukan polinomial persamaan karakteristik
2. Menentukan akar-akar persamaan karakteristik
3. Membentuk solusi umum berdasarkan akar-akar pada langkah ke-2, yang terdiri dari beberapa kasus:
    - Kasus Akar-Akar Real Tak Berulang (Akar Real Berbeda)
    - Kasus Akar-Akar Real Berulang (Akar Real Sama)
    - Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Tak Berulang
    - Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Berulang

4.3.1 Kasus Akar-Akar Real Berbeda

4.3.1 Kasus Pertama: Akar-Akar Real Berbeda

4.3.1 Kasus Akar-Akar Real Berbeda

- Andaikan sebuah persamaan diferensial linear homogen orde n dengan koefisien konstan (11) dan jika persamaan karakteristik pada persamaan (13) , semuanya bilangan real berbeda, yakni

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

maka basis-basis solusinya diberikan oleh

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

- Dengan demikian solusi umum diberikan oleh

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \tag{14}$$

dimana $c_1, c_{2,\ldots} c_n$ konstanta.

4.3.1 Kasus Akar-Akar Real Berbeda

Example

Carilah solusi umum persamaan diferensial berikut:

1. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y^{(4)} - 5y''' + 5y'' + 5y' - 6y = 0$

4.3.1 Kasus Akar-Akar Real Berbeda

Solution

1. *Untuk soal nomor 1, diperoleh persamaan karakteristik*

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

dengan metode horner, diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \lambda - 6\right) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

yang berarti akar-akar persamaan karakteristik adalah

$$\lambda_1 = 1, \lambda_1 = -2, \ dan\ \lambda_3 = 3$$

sehingga, solusi umum adalah

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$$

4.3.2 Kasus Akar-Akar Real Sama

4.3.2 Kasus Kedua: Akar-Akar Real Sama

4.3.2 Kasus Akar-Akar Real Sama

- Andaikan sebuah persamaan diferensial linear homogen orde n dengan koefisien konstan (11) dan jika persamaan karakteristik pada persamaan (13) , memuat m akar-akar real sama, yakni

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = \lambda$$

maka basis-basis solusinya diberikan oleh

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, y_3 = x^2 e^{\lambda x}, \cdots, y_m = x^{m-1} e^{\lambda x}$$

- Dengan demikian solusi umum diberikan oleh

$$y(x) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \cdots + c_m x^{m-1}\right) e^{\lambda x} \tag{15}$$

dimana $c_1, c_{2,\ldots} c_m$ konstanta.

4.3.2 Kasus Akar-Akar Real Sama

Example

Carilah solusi umum persamaan diferensial berikut:

1. $y''' - y'' - y' + y = 0$
2. $y^{(4)} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0$

4.3.2 Kasus Akar-Akar Real Sama

Solution

1. *Persamaan Karakteristik*

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

dengan metode horner, diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 1\right) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

yang berarti akar-akar persamaan karakteristik adalah

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \text{ dan } \lambda_3 = -1$$

sehingga, solusi umum adalah

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^x - c_3 e^{-x}$$

4.3.3 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Tak Berulang

4.3.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks Konjugate Tak Berulang

4.3.3 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Tak Berulang

- Andaikan sebuah persamaan diferensial linear homogen orde n dengan koefisien konstan (11) dan jika persamaan karakteristik pada persamaan (13) , memuat akar-akar kompleks konjugate, yakni

$$\lambda_{12} = a \pm bi$$

maka basis-basis solusinya diberikan oleh

$$y_1 = e^{ax} \cos bx \text{ dan } y_2 = e^{ax} \sin bx$$

- Dengan demikian solusi umum diberikan oleh

$$y(x) = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \tag{16}$$

dimana c_1, c_2 konstanta.

4.3.3 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Tak Berulang

Example

Carilah solusi umum persamaan diferensial berikut:

1. $y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0$
2. $y^{(4)} - 10y''' + 41y'' - 76y' + 52y = 0$
3. $y^{(4)} - 4y''' + 9y'' - 16y' + 20y = 0$

4.3.3 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Tak berulang

Solution

2. *Untuk kasus nomor 2, diperoleh Persamaan Karakteristik*

$$\lambda^3 - 10\lambda^3 + 41\lambda^2 - 76\lambda + 52 = 0.$$

dengan metode horner, diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 10\lambda^3 + 41\lambda^2 - 76\lambda + 52 &= (\lambda - 2)\left(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26\right) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 13\right) \\ &= (\lambda - 2)^2\left((\lambda - 3)^2 + 4\right) \end{aligned}$$

4.3.3 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Tak berulang

Solution

2. *yang berarti akar-akar persamaan karakteristik adalah*

$$\lambda_{12} = 2 \; dan \; \lambda_{34} = 3 \pm 2i$$

sehingga, solusi umum adalah

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x} + (c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)\, e^{3x}$$

4.3.4 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Berulang

4.3.4 Kasus Keempat: Akar-Akar Kompleks Konjugate Berulang

4.3.4 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Berulang

- Andaikan sebuah persamaan diferensial linear homogen orde n dengan koefisien konstan (11) dan jika persamaan karakteristik pada persamaan (13) , memuat akar-akar kompleks konjugate berulang, yakni

$$\lambda_{12} = a \pm bi \text{ dan } \lambda_{34} = a \pm bi$$

  maka basis-basis solusinya diberikan oleh

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \;\; y_2 = e^{ax} \sin bx, y_3 = xe^{ax} \cos bx, \;\; y_4 = xe^{ax} \sin bx$$

- Dengan demikian solusi umum diberikan oleh

$$y(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + xe^{ax}(c_3 \cos bx + c_4 \sin bx) \quad (17)$$

  dimana c_1, c_2, c_3, c_4 konstanta.

4.3.4 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate Berulang

Example

Carilah solusi umum persamaan diferensial berikut:

$$y^{(4)} + 8y' + 16y = 0$$

4.3.4 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate berulang

Solution

Persamaan Karakteristik

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0.$$

Tulis kembali persamaan karakteristik menjadi

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = \left(\lambda^2 + 4\right)\left(\lambda^2 + 4\right)$$

yang berarti akar-akar persamaan karakteristik adalah

$$\lambda_{12} = \pm 2i \ dan \ \lambda_{34} = \pm 2i$$

4.3.4 Kasus Akar-Akar Kompleks Konjugate berulang

Solution

sehingga, solusi umum adalah

$$\begin{aligned} y &= e^{0}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) + xe^{0}\left(c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x\right) \\ &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x \\ &= \left(c_1 + c_3 x\right) \cos 2x + \left(c_2 + c_4 x\right) \sin 2x \end{aligned}$$

* Soal-Soal Latihan 8

Problem

Carilah solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

1. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
2. $y^{(4)} + 3y''' + 5y'' + y' - 10y = 0$
3. $y^{(4)} - 6y''' + 17y'' - 20y' + 8y = 0$

   Carilah solusi umum dan solusi khusus dari persamaan diferensial dengan nilai awal berikut
4. $y''' + 3y'' + y' - 5y = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 4,\ dan\ y''(0) = 0$
5. $2y^{(4)} - 11y''' + 21y'' - 16y' + 4y = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 2,\ dan\ y'''(0) = 0$
6. $y^{(4)} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2,\ dan\ y'''(0) = 4$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "