PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Persamaan Diferensian Biasa Orde n Koefisien Konstan

Resmawan

UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

November 2018

4.1 Pengertian dan Klasifikasi

4.1 Pengertian dan Klasifikasi

4.1 Pengertian dan Klasifikasi

Definition

Persamaan Diferensial linear biasa orde n adalah persamaan diferensial yang memuat turunan ke-n dari suatu fungsi yang tak diketahui

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

yang secara umum dapat ditulis dalam bentuk

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = r(x) \tag{1}$$

dimana $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ dengan $a_n \neq 0$ dan r adalah fungsi dari x.

- PD ini dikatakan **linear** karena pangkat tertinggi dari fungsi dan turunan-turunannya, $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y'', y'$, dan y yang tak diketahui berderajat satu.

4.1 Pengertian dan Klasifikasi

Berdasarkan nilai koefisien pada persamaan (1) , **Persamaan Diferensial Linear** diklasifikasikan sebagai berikut:

1. **Persamaan Diferensial Homogen Koefisien Konstan**, jika koefisien $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ adalah konstan dan $r(x) = 0$.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

2. **Persamaan Diferensial Homogen Koefisien Variabel**, jika koefisien $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ merupakan fungsi-fungsi x, $a_n \neq 0$, dan $r(x) = 0$. Contoh PD jenis ini adalah persamaan Cauchy homogen orde ke$-n$

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

4.1 Pengertian dan Klasifikasi

3. **Persamaan Diferensial Non Homogen Koefisien Konstan**, jika koefisien $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ adalah konstan, $a_n \neq 0$, dan $r(x) \neq 0$.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = r(x)$$

4. **Persamaan Diferensial Non Homogen Koefisien Variabel**, jika koefisien $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ merupakan fungsi-fungsi x, $a_n \neq 0$, dan $r(x) \neq 0$. Contoh PD jenis ini adalah persamaan Cauchy non homogen orde ke$-n$

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = r(x)$$

4.2 PD Linear Orde Dua Homogen Koefisien Konstan

4.2 PD Linear Orde Dua Homogen Koefisien Konstan

4.2 PD Linear Orde Dua Homogen Koefisien Konstan

- Misal PD Linear Orde Dua Koefisien Konstan
$$ay'' + by' + cy = r(x) \tag{2}$$
- Persamaan (2) disebut linear karena pangkat tertinggi dari y'', y', dan y adalah satu.
- Jika $r(x) = 0$, maka persamaan (2) disebut PD homogen dengan bentuk
$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3}$$
dengan a, b, c konstanta.
- Solusi umum dari PD homogen (3) berbentuk
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
dimana c_1, c_2 konstan dan y_1, y_2 fungsi-fungsi dari x, yang disebut basis penyelesaian y. Andaikan basis penyelesaian berbentuk
$$y = e^{\lambda x} \tag{4}$$

4.2 PD Linear Orde Dua Homogen Koefisien Konstan

- maka

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{dan} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \tag{5}$$

- Jika persamaan (4) dan (5) disubtitusi ke persamaan (3) , maka

$$\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) e^{\lambda x} = 0$$

- Karena $e^{\lambda x} \neq 0$, maka

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{6}$$

- Persamaan (6) disebut **Persamaan Karakteristik** yang akar-akarnya diberikan oleh

$$\lambda_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7}$$

4.2 PD Linear Orde Dua Homogen Koefisien Konstan

- Selanjutnya, **solusi umum** *persamaan diferensial homogen* akan bergantung pada akar-akar persamaan karakteristik (7) yang terdiri atas 3 kasus:

  1. λ_1 dan λ_2 merupakan dua akar real berbeda.
     Kasus ini terjadi jika
     $$D = b^2 - 4ac > 0$$
  2. λ_1 dan λ_2 merupakan dua akar real kembar.
     Kasus ini terjadi jika
     $$D = b^2 - 4ac = 0$$
  3. λ_1 dan λ_2 merupakan dua akar kompleks.
     Kasus ini terjadi jika
     $$D = b^2 - 4ac < 0$$

4.2.1 Kasus Pertama: Dua Akar Real Beda

4.2.1 Kasus Pertama: Dua Akar Real Beda

4.2.1 Kasus Pertama: Dua Akar Real Beda

- Jika diskriminan persamaan karakteristik lebih besar dari nol

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

  Maka persamaan karakteristik mempunyai akar-akar real berbeda, yaitu

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Dalam kasus ini, basis-basis solusi diberikan oleh

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad dan \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

- Dengan demikian, solusi umum persamaan diferensial homogen (3) diberikan oleh

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{8}$$

  dimana c_1 dan c_2 konstanta.

4.2.1 Kasus Pertama: Dua Akar Real Beda

Examples

Carilah solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

1. $y'' + 4y' - 12y = 0$
2. $y'' - 4y' + 3y = 0$
3. $2y'' - 5y' + 3y = 0; \quad y(0) = 6, y'(0) = 13$

4.2.1 Kasus Pertama: Dua Akar Real Beda

Solution

1. *Persamaan karakteristik yang bersesuaian*

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 4\lambda - 12 &= 0 & \qquad \lambda_1 &= 2 \\ (\lambda - 2)(\lambda + 6) &= 0 & \qquad \lambda_2 &= -6 \end{aligned}$$

   sehingga solusi umum PD adalah

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-6x}$$

2. *Dengan cara sama*

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda + 3 &= 0 & \qquad \lambda_1 &= 1 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 3) &= 0 & \qquad \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$$

   sehingga diperoleh solusi $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

4.2.1 Kasus Pertama: Dua Akar Real Beda

Solution

3. *Persamaan karakteristik yang bersesuaian*

$$\begin{array}{ll} 2\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0 & \lambda_1 = \frac{3}{2} \\ (2\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 & \lambda_2 = 1 \end{array}$$

sehingga solusi umum PD adalah

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^x \\ y' &= \frac{3}{2} c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^x \end{aligned}$$

Dengan nilai awal $y(0) = 6, y'(0) = 13$ *diperoleh*

$$\begin{aligned} 6 &= c_1 + c_2 \\ 26 &= 3c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

4.2.1 Kasus Pertama: Dua Akar Real Beda

Solution

3. *Dengan demikian,*

$$\begin{aligned} 26 &= c_1 + 2c_2 \\ 26 &= 3c_1 + 2\left(6 - c_1\right) \\ c_1 &= 14 \\ c_2 &= -8 \end{aligned}$$

sehingga solusi kuhusus PD adalah

$$y = 14e^{\frac{3}{2}x} - 8e^{x}$$

4.2.2 Kasus Kedua: Akar Real Kembar

4.2.2 Kasus Kedua: Akar Real Kembar

4.2.2 Kasus Kedua: Akar Real Kembar

- Jika diskriminan persamaan karakteristik sama dengan nol

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

Maka persamaan karakteristik mempunyai akar-akar real kembar, yaitu

$$\lambda_{12} = \frac{-b}{2a}$$

- Dalam kasus ini, basis-basis solusi diberikan oleh

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad dan \quad y_2 = xe^{\lambda x}$$

- Dengan demikian, solusi umum persamaan diferensial homogen (3) diberikan oleh

$$y = (c_1 + xc_2)\, e^{\lambda x} \tag{9}$$

dimana c_1 dan c_2 konstanta.

4.2.2 Kasus Kedua: Akar Real Kembar

Examples

Carilah solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

1. $y'' - 8y' + 16y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 4, y'(0) = 3$

4.2.2 Kasus Kedua: Akar Real Kembar

Solution

1. *Diketahui persamaan karakteristik*

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 8\lambda + 16 &= 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda - 4) &= 0 \\ \lambda_{12} &= 4 \end{aligned}$$

Maka solusi umum PD adalah

$$y = (c_1 + xc_2)\, e^{4x}$$

4.2.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks

4.2.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks

4.2.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks

- Jika diskriminan persamaan karakteristik kurang dari nol

  $$D = b^2 - 4ac < 0$$

  Maka persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks, yaitu

  $$\lambda_1 = \alpha + \beta i \quad dan \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$$

  dimana

  $$\alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Dalam kasus ini, basis-basis solusi diberikan oleh

  $$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} \quad dan \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$$

- Dengan demikian, solusi umum persamaan diferensial homogen (3) diberikan oleh

  $$y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x} \tag{10}$$

  dimana c_1 dan c_2 konstanta.

4.2.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks

Problem

Buktikan kebenaran persamaan (10)

4.2.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks

Examples

Carilah solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

1. $y'' - 6y' + 13y = 0$
2. $4y'' - 4y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 11$

4.2.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks

Solution

1. *Persamaan karakteristik*

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - 6\lambda + 13 &= 0 \\
\lambda_{12} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \\
&= 3 \pm 2i
\end{aligned}$$

sehingga solusi umum adalah

$$y = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)\, e^{3x}$$

4.2.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks

Solution

2. *Persamaan karakteristik*

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 - 4\lambda + 5 &= 0 \\ \lambda_{12} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \lambda_{12} &= \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{8} \\ &= \frac{1}{2} \pm i \end{aligned}$$

sehingga solusi umum adalah

$$y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x}$$

4.2.3 Kasus Ketiga: Akar-Akar Kompleks

Solution

2. *Dengan nilai awal* $y(0) = 2, y'(0) = 11$ *dan selanjutnya*

$$y' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + (-c_1 \sin x + c_2 \cos x)\, e^{\frac{1}{2}x}$$

Maka

$$\begin{aligned} 2 &= (c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0)\, e^0 \Leftrightarrow c_1 = 2 \\ 11 &= \frac{1}{2}c_1 + c_2 \Longleftrightarrow c_2 = 10 \end{aligned}$$

Solusi Khusus PD

$$y = (2\cos x + 10 \sin x)\, e^{\frac{1}{2}x}$$

* Soal-Soal Latihan 7

Problem

Carilah solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$
2. $y'' - 2y' + 10y = 0$
3. $2y'' + 7y' - 4y = 0$
4. $4y'' - 4y' + y = 0$

   Carilah solusi umum dan solusi khusus dari persamaan diferensial dengan nilai awal berikut
5. $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 8$
6. $y'' - 6y' + 25y = 0; \quad y(0) = 6, y'(0) = 8$
7. $y'' + 4y' - 5y = 0; \quad y(0) = 3, y'(0) = 2$
8. $y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 5$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "