PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Persamaan Diferensian Biasa Orde n Koefisien Konstan

Resmawan

UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

November 2018

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

- Perhatikan bentuk umum

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = r(x) \qquad (18)$$

dengan koefisien-koefisien $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ adalah konstanta dan $a_n \neq 0$.

- Solusi umum persamaan (18) dapat dinyatakan

$$y = y_h + y_p$$

dengan

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots c_n y_n$$

merupakan solusi homogen dari persamaan (18) sedangkan y_p merupakan solusi khusus yang berkaitan dengan fungsi $r(x)$.

- Solusi khusus y_p dapat diselesaikan dengan :
  1. Metode Koefisien Tak Tentu
  2. Metode Variasi parameter
- Berikut akan dibahas metode koefisien tak tentu

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

Beberapa aturan dalam penentuan solusi khusus y_p, dengan memperhatikan tabel berikut

Bentuk $r(x)$	*Pilihan* y_p
$k\ x^n$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k\ e^{ax}$	Ke^{ax}
$k\ \cos bx$	$A\cos bx + B\sin bx$
$k\ \sin bx$	$A\cos bx + B\sin bx$
$k\ x^n e^{ax}$	$\left(K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0\right) e^{ax}$
$k\ x\cos bx$	$\left(A_1\cos bx + B_1\sin bx\right) + \left(A_2 x\cos bx + B_2 x\sin bx\right)$
$k\ x\sin bx$	$\left(A_1\cos bx + B_1\sin bx\right) + \left(A_2 x\cos bx + B_2 x\sin bx\right)$
$k\ e^{ax}\cos bx$	$\left(A\cos bx + B\sin bx\right) e^{ax}$
$k\ e^{ax}\sin bx$	$\left(A\cos bx + B\sin bx\right) e^{ax}$

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

1. **Aturan Dasar**
    - Jika $r(x)$ pada kolom pertama bukan solusi homogen y_h, maka pilih y_p yang sesuai pada kolom kedua.
    - Koefisien-koefisien tak tentunya diperoleh dengan mensubtitusi y_p beserta turunan-turunannya ke PD awal.
2. **Aturan Kedua**
    - Jika y_p pada langkah 1 merupakan solusi y_h, maka kalikanlah y_p tersebut dengan $x\left(atau\ x^2\right)$.
    - Koefisien-koefisien tak tentunya diperoleh dengan mensubtitusi y_p beserta turunan-turunannya ke PD awal.
3. **Aturan Ketiga**
    - Jika $r(x)$ merupakan penjumlahan dari beberapa fungsi pada kolom pertama, maka pilih y_p yang merupakan penjumlahan fungsi-fungsi yang sesuai pada kolom 2.
    - Koefisien tak tentunya diperoleh sebagaimana langkah 1 dan 2.

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

Berdasarkan aturan dasar, langkah-langkah menentukan y_p dengan **Metode Koefisien Tak Tentu,** antara lain:

1. Tentukan solusi umum homogen
2. Selidiki apakah $y(x)$ merupakan solusi dari y_h. Jika tidak, gunakan aturan 1, jika ya, gunakan aturan 2.
3. Tentukan konstanta-konstanta y_p yang memenuhi kondisi tersebut

Example

Carilah solusi Persamaan Diferensial

$$y'' + 4y = 12x^3 + 16x^2 - 6x \tag{19}$$

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

Solution

- *Solusi Homogen*

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda &= \pm 2i \\ y_h &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \end{aligned}$$

- *Solusi Partikular*

$$r(x) = 12x^3 + 16x^2 - 6x$$

sehingga

$$y_p = k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0 \neq y_h \tag{20}$$

$$y_p'' = 6k_3x + 2k_2 \tag{21}$$

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

Solution

- *Solusi Partikular*
  Subtitusi (20) *dan* (21) *ke* (19)

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 12x^3 + 16x^2 - 6x \\ 6k_3x + 2k_2 + 4\left(k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0\right) &= 12x^3 + 16x^2 - 6x \\ 4k_3x^3 + 4k_2x^2 + (6k_3 + 4k_1)\,x + (2k_2 + 4k_0) &= 12x^3 + 16x^2 - 6x \end{aligned}$$

Dari persamaan ini diperoleh

$$\begin{aligned} 4k_3 &= 12 \Leftrightarrow k_3 = 3 \\ 4k_2 &= 16 \Leftrightarrow k_2 = 4 \\ 6k_3 + 4k_1 &= -6 \Leftrightarrow k_1 = -6 \\ 2k_2 + 4k_0 &= 0 \Leftrightarrow k_0 = -2 \end{aligned}$$

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

Solution

- *Solusi Partikular*
  sehingga

$$y_p = 3x^3 + 4x^2 - 6x - 2$$

- *Solusi Umum PD*

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 2 \end{aligned}$$

Example

Carilah solusi dari Persamaan Diferensial

$$y'' + 4y = 4\cos 2x + 16 \sin 2x$$

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

Solution

- *Solusi Homogen*

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda &= \pm 2i \\ y_h &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \end{aligned}$$

- *Solusi Partikular*

$$r(x) = 4\cos 2x + 16 \sin 2x$$

Karena

$$A\cos 2x + B\sin 2x = y_h$$

Maka diambil y_p sesuai aturan 2

$$y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x) = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$$

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

Solution

- *Solusi Partikular*
  Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} y_p' &= (A + 2Bx)\cos 2x + (-2Ax + B)\sin 2x \\ y_p'' &= (4B - 4Ax)\cos 2x + (-4Ax - 4Bx)\sin 2x \end{aligned}$$

Subtitusi y_p'' *dan* y_p *ke PD awal menghasilkan*

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 4\cos 2x + 16\sin 2x$$

$$4B = 4 \Leftrightarrow B = 1 \;\; dan \;\; -4A = 16 \Leftrightarrow A = -4$$

sehingga

$$y_p = -4x\cos 2x + x\sin 2x$$

4.4 PD Linear Orde n Non Homogen Koefisien Konstan

Solution

- *Solusi Umum PD*

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - 4x \cos 2x + x \sin 2x \end{aligned}$$

Problem

Carilah solusi umum dari Persamaan Diferensial berikut:

1. $y'' - 4y' + 4y = 12xe^{2x} + 6e^{2x}$
2. $y'' - 4y' + 8y = 34e^{x} \sin 2x$
3. $y''' - 4y'' + 4y' - 4y = 80 \cos 2x$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "