

KALKULUS LANJUT

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

0 Tinjauan Perkuliahan

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan
 - Tidak memakai jeans/celana bagi wanita

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan
 - Tidak memakai jeans/celana bagi wanita
 - Tidak mengenakan asesoris wanita bagi pria

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan
 - Tidak memakai jeans/celana bagi wanita
 - Tidak mengenakan asesoris wanita bagi pria
 - Duduk terpisah antara laki-laki dan perempuan

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan
 - Tidak memakai jeans/celana bagi wanita
 - Tidak mengenakan asesoris wanita bagi pria
 - Duduk terpisah antara laki-laki dan perempuan
 - Tidak menggunakan HP saat kuliah berlangsung

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan
 - Tidak memakai jeans/celana bagi wanita
 - Tidak mengenakan asesoris wanita bagi pria
 - Duduk terpisah antara laki-laki dan perempuan
 - Tidak menggunakan HP saat kuliah berlangsung
 - Absensi dilakukan secara online setiap awal perkuliahan

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan
 - Tidak memakai jeans/celana bagi wanita
 - Tidak mengenakan asesoris wanita bagi pria
 - Duduk terpisah antara laki-laki dan perempuan
 - Tidak menggunakan HP saat kuliah berlangsung
 - Absensi dilakukan secara online setiap awal perkuliahan
- Strategi Perkuliahan

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan
 - Tidak memakai jeans/celana bagi wanita
 - Tidak mengenakan asesoris wanita bagi pria
 - Duduk terpisah antara laki-laki dan perempuan
 - Tidak menggunakan HP saat kuliah berlangsung
 - Absensi dilakukan secara online setiap awal perkuliahan
- Strategi Perkuliahan
 - Kuliah Tatap Muka : Kuliah Tatap Muka, Diskusi, Presentasi

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Jadwal Perkuliahan
- Peraturan
 - Berpakaian rapi dan sopan
 - Tidak memakai jeans/celana bagi wanita
 - Tidak mengenakan asesoris wanita bagi pria
 - Duduk terpisah antara laki-laki dan perempuan
 - Tidak menggunakan HP saat kuliah berlangsung
 - Absensi dilakukan secara online setiap awal perkuliahan
- Strategi Perkuliahan
 - Kuliah Tatap Muka : Kuliah Tatap Muka, Diskusi, Presentasi
 - Kuliah Non Tatap Muka : Tugas Mandiri, Diskusi

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Kehadiran dalam perkuliahan minimal 80%

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Kehadiran dalam perkuliahan minimal 80%
- Kriteria Penilaian

Kriteria Penilaian	Bobot
Partisipasi	10%
Tugas	20%
UTS	30%
UAS	40%
Total	100%

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Kehadiran dalam perkuliahan minimal 80%
- Kriteria Penilaian

Kriteria Penilaian	Bobot
Partisipasi	10%
Tugas	20%
UTS	30%
UAS	40%
Total	100%

- Kriteria Kelulusan

Nilai Akhir (NA)	Predikat	Nilai Akhir (NA)	Predikat
$80 \leq \mathbf{NA} \leq 100$	<i>A</i>	$60 \leq \mathbf{NA} < 65$	<i>B-</i>
$75 \leq \mathbf{NA} < 80$	<i>A-</i>	$55 \leq \mathbf{NA} < 60$	<i>C+</i>
$70 \leq \mathbf{NA} < 75$	<i>B+</i>	$50 \leq \mathbf{NA} < 55$	<i>C</i>
$65 \leq \mathbf{NA} < 70$	<i>B</i>	$45 \leq \mathbf{NA} < 50$	<i>D</i>

0.2 Deskripsi Mata Kuliah

- Deskripsi Matakuliah

Mata kuliah Kalkulus Lanjut berisi bahasan tentang fungsi dengan banyak variabel, turunan parsial, integral lipat dan kalkulus vektor. Disamping itu juga dibahas tentang aplikasi atau terapannya pada bidang-bidang terkait.

- Kompetensi Matakuliah

Memahami konsep-konsep yang berkaitan dengan fungsi dua variabel atau lebih, turunan parsial, integral lipat, kalkulus vektor serta menerapkannya pada permasalahan yang terkait

- Mata Kuliah Prasyarat : Kalkulus 1 dan Kalkulus 2

- Topik Perkuliahan

- 1 Turunan Parsial
- 2 Integral Lipat
- 3 Kalkulus Vektor

0.3 Referensi

- 1 J. Stewart, "Kalkulus," Edisi 4 Jilid 2. Jakarta : Erlangga, 2003.
- 2 D. Varberg, E.J. Purcell, S. E. Rigdon, "Kalkulus," Edisi 9 Jilid 2. Jakarta : Erlangga, 2010.

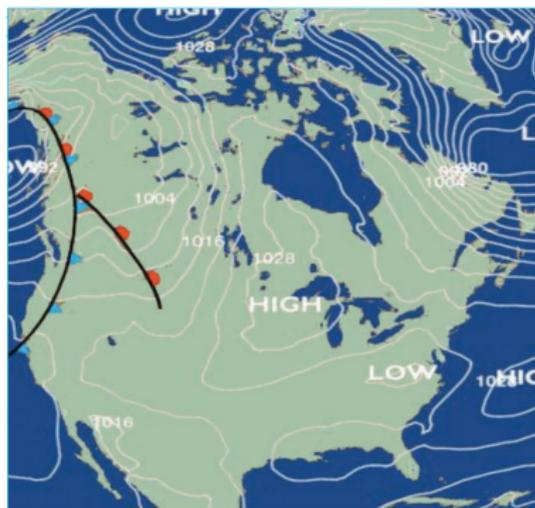
1. Fungsi Dua Variabel atau Lebih

1.1 Pendahuluan

- Setelah mempelajari fungsi satu variabel, baik yang bernilai skalar maupun yang bernilai vektor, pada bab ini kita akan mempelajari fungsi dengan dua (atau lebih) variabel.
- Pada subbab ini mahasiswa diharapkan mampu
 - 1 Menentukan daerah asal dan menggambar grafik fungsi dua variabel atau lebih.
 - 2 Menentukan kurva ketinggian dan menggambar peta kontur fungsi dua variabel atau lebih.

1.1 Pendahuluan

Cara efektif untuk memvisualisasikan fungsi dua variabel adalah dengan memplot kurva ketinggian atau peta kontur. Kurva ini menunjukkan dimana fungsi mengambil nilai-nilai yang diberikan. Gambar berikut menunjukkan peta kontur dari tekanan atmosfer disuatu wilayah.

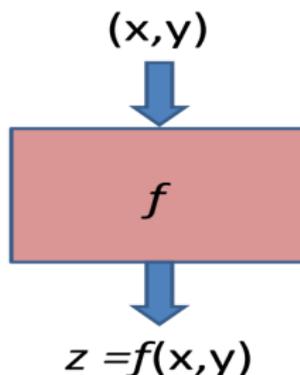


1.2 Definisi Fungsi Dua Variabel

Definition

Fungsi Dua Variabel didefinisikan sebagai sebuah fungsi bernilai real dari dua variabel real, yakni fungsi f yang memetakan setiap pasangan terurut (x, y) pada suatu himpunan D dari bidang dengan bilangan real tunggal $f(x, y)$.

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar berikut



1.2 Definisi Fungsi Dua Variabel

Example

Berikut diberikan beberapa contoh fungsi dengan dua variabel

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

$$g(x, y) = 2x\sqrt{y}$$

- Perhatikan bahwa $f(-1, 4) = (-1)^2 + 3(4)^2 = 49$ dan $g(-1, 4) = 2(-1)\sqrt{4} = -4$.
- Himpunan D disebut sebagai **Daerah Asal** fungsi, disebut sebagai daerah asal alami (*natural domain*) jika tidak dinyatakan secara khusus, yaitu himpunan semua titik (x, y) pada suatu bidang dimana fungsi tersebut terdefinisi.
- Daerah asal alami fungsi nomor 1 adalah seluruh bidang, sementara daerah asal alami fungsi nomor 2 adalah $\{(x, y) : -\infty < x < \infty, y \geq 0\}$.

1.2 Definisi Fungsi Dua Variabel

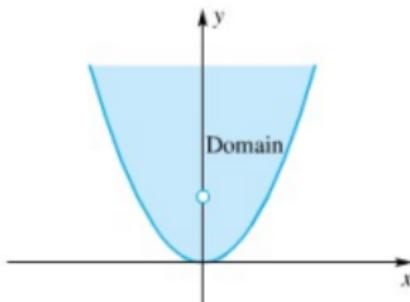
Example

Sketsalah daerah asal alami untuk

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{x^2 + (y - 1)^2}$$

Solution

Daerah asal alami agar fungsi ini bermakna adalah seluruh bidang diluar $\{(x, y) : x^2 \leq y\}$ dan titik $(0, 1)$. Dalam bentuk sketsa dinyatakan sebagai berikut:



1.2 Definisi Fungsi Dua Variabel

Example

Sketsalah grafik fungsi berikut

$$f(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$$

Solution

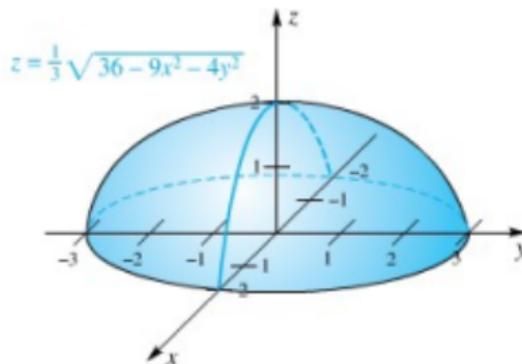
Misal $z = \frac{1}{3} \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ dan perhatikan bahwa $z \geq 0$. Jika kedua ruas dikuadratkan dan disederhanakan, maka diperoleh persamaan elipsoidal

$$9x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$$

1.2 Definisi Fungsi Dua Variabel

Solution

Grafik fungsi ditunjukkan sebagai berikut:



1.2 Definisi Fungsi Dua Variabel

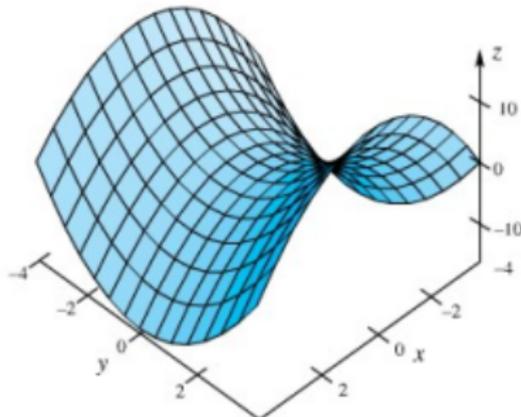
Example

Sketsalah grafik fungsi berikut

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2$$

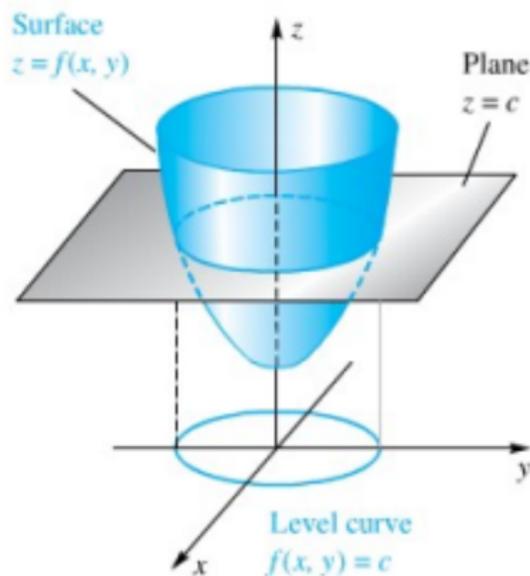
Solution

Sketsa grafik merupakan sebuah paraboloida



1.3 Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

- Untuk memudahkan sketsa grafik fungsi $z = f(x, y)$, diberikan bidang mendatar $z = c$ yang memotong permukaan kurva.



1.3 Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

- Proyeksi kurva ini pada bidang- xy disebut **Kurva Ketinggian** sedangkan kumpulan kurva-kurva yang demikian disebut **Peta Kontur**.

Example

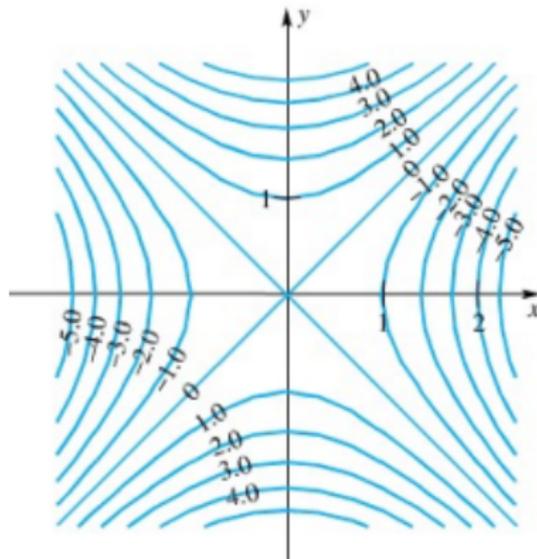
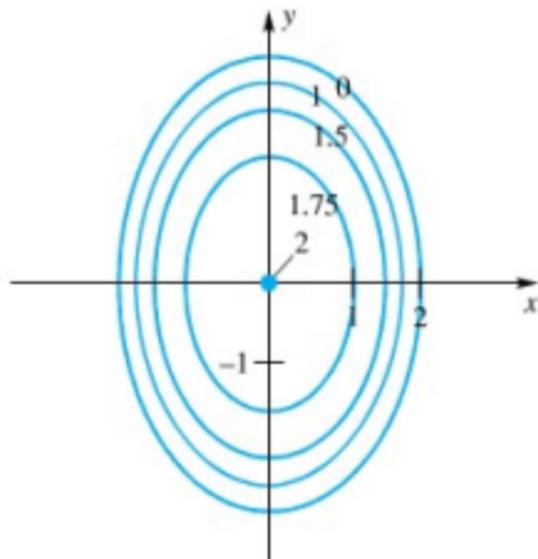
Gambar peta kontur untuk permukaan yang berpadanan dengan dua fungsi berikut

$$z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \quad \text{dan} \quad z = y^2 - x^2.$$

1.3 Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

Solution

Kurva-kurva ketinggian dari $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ berpadanan dengan $z = 0; 1; 1.5; 1.75; 2$ dan $z = y^2 - x^2$ yang berpadanan dengan $z = -5; -4; \dots; 3; 4$ masing-masing diperlihatkan pada gambar berikut



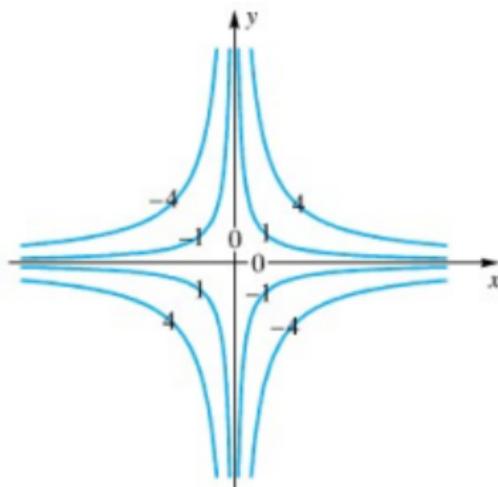
1.3 Kurva Ketinggian dan Peta Kontur

Example

Sketsa peta kontur untuk fungsi

$$z = f(x, y) = xy$$

yang berpadanan dengan nilai $z = -4, -1, 0, 1, 4$



1.4 Grafik Komputer Kurva Ketinggian

- Gambar-gambar berikut memperlihatkan perpadanan antara permukaan, grafik ketinggian dan peta kontur.
- Perhatikan bahwa kita memutar bidang $-xy$ sehingga sumbu $-x$ menuju ke kanan, agar lebih mudah untuk menghubungkan permukaan dan kurva-kurva ketinggian

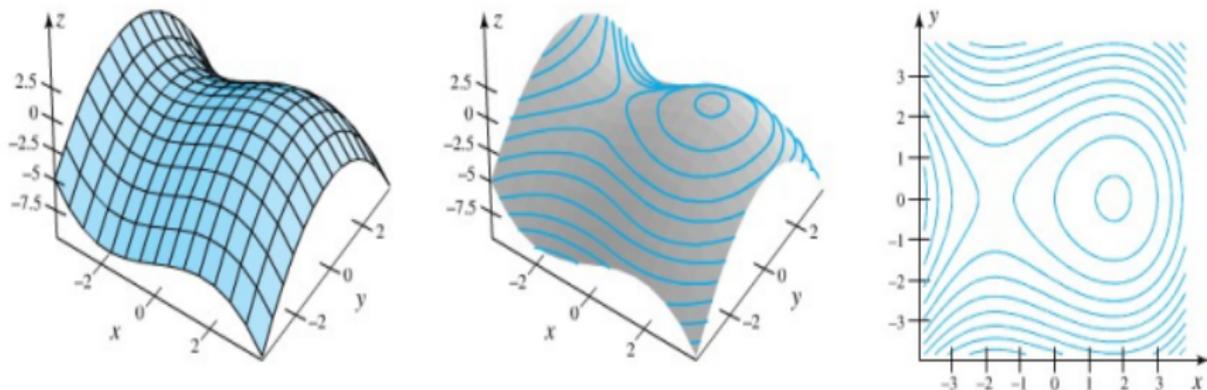


Figure 15

$$z = x - \left(\frac{1}{9}\right)x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)y^2 \quad \begin{cases} -3.8 \leq x \leq 3.8 \\ -3.8 \leq y \leq 3.8 \end{cases}$$

1.4 Grafik Komputer Kurva Ketinggian

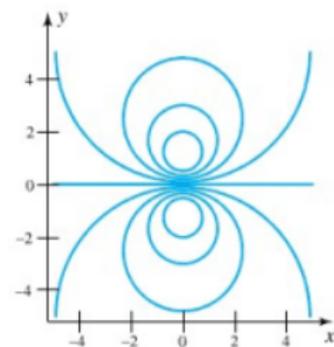
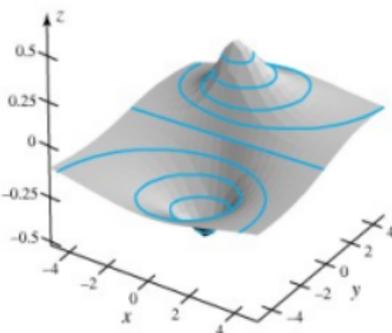
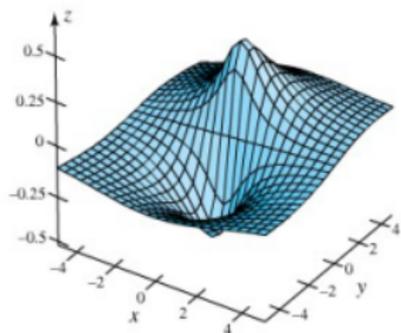
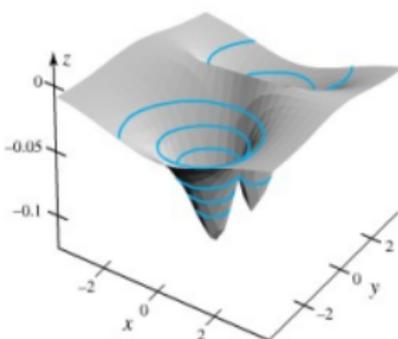
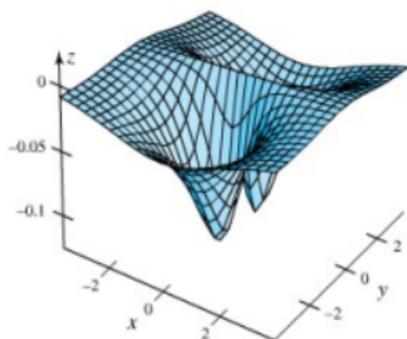


Figure 16

$$z = \frac{y}{(1+x^2+y^2)} \quad \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -5 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

1.4 Grafik Komputer Kurva Ketinggian



$$z = -1 + \cos\left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right) \begin{cases} -3.8 \leq x \leq 3.8 \\ -3.8 \leq y \leq 3.8 \end{cases}$$

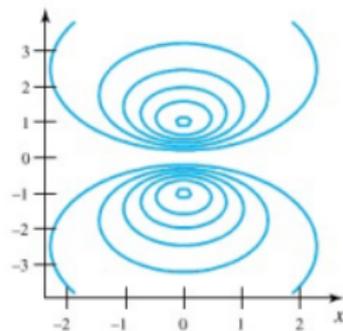


Figure 17

1.5 Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

- Beberapa kondisi terkadang ditentukan oleh tiga variabel atau lebih, sehingga menghasilkan suatu fungsi dengan tiga atau lebih variabel.
- Misalnya suhu disuatu ruangan yang dipengaruhi oleh lokasi (x, y, z) sehingga menghasilkan fungsi $T(x, y, z)$
- Kecepatan fluida yang dipengaruhi oleh lokasi (x, y, z) selain waktu t sehingga menghasilkan fungsi $V(x, y, z, t)$
- Nilai rata-rata ujian 30 mahasiswa yang dipengaruhi oleh masing-masing nilai mahasiswa $(x_1, x_2, \dots, x_{30})$ sehingga menghasilkan fungsi $N(x_1, x_2, \dots, x_{30})$

1.5 Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Example

Carilah daerah asal untuk masing-masing fungsi berikut dan jelaskan permukaan-permukaan ketinggian untuk f .

$$1) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

$$2) g(w, x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$$

1.5 Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Solution

- ① Untuk menghindari akar bilangan negatif, maka bilangan terurut (x, y, z) harus memenuhi $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$, sehingga daerah asal fungsi f terdiri dari semua titik (z, y, z) yang terletak pada atau diluar lingkaran satuan.

Permukaan ketinggian dari fungsi f adalah permukaan di ruang tiga yang memenuhi $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 = c$ selama $c \geq 0$. Hubungan ini menuju ke $x^2 + y^2 + z^2 = c + 1$, sebuah bola yang berpusat di titik asal $(0, 0, 0)$.

- ② Bilangan terurut (w, x, y, z) harus memenuhi $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 > 1$ untuk menghindari akar bilangan negatif dan pembagian oleh 0.

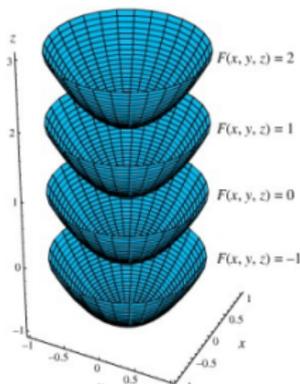
1.5 Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

Example

Misalkan $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. Jelaskan permukaan ketinggian untuk F dan plotlah permukaan ketinggian untuk $-1, 0, 1$, dan 2 .

Solution

Hubungan $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = c$ menuju ke $z = c + x^2 + y^2$ merupakan sebuah paraboloida yang membuka ke atas dengan puncak di $(0, 0, c)$.



1.6 Latihan 1

Problem

Selesaikan soal-soal 12.1 pada Kalkulus Varberg, Purcell, Rigdom Edisi 9 Jilid 2:

- 1 *Nomor 2*
- 2 *Nomor 8,10,14,16*
- 3 *Nomor 18,20,22*
- 4 *Nomor 39*
- 5 *Nomor 40*