PENGANTAR SISTEM DINAMIK

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

0 Tinjauan Perkuliahan

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Kehadiran dalam perkuliahan minimal 80%

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Kehadiran dalam perkuliahan minimal 80%
- Kriteria Penilaian

Kriteria Penilaian	**Bobot**
Partisipasi	10%
Tugas	20%
UTS	30%
UAS	40%
Total	**100%**

0.1 Mekanisme Perkuliahan

- Kehadiran dalam perkuliahan minimal 80%
- Kriteria Penilaian

Kriteria Penilaian	**Bobot**
Partisipasi	10%
Tugas	20%
UTS	30%
UAS	40%
Total	**100%**

- Kriteria Kelulusan

Nilai Akhir (NA)	**Predikat**	**Nilai Akhir (NA)**	**Predikat**
$80 \leq \mathbf{NA} \leq 100$	A	$60 \leq \mathbf{NA} < 65$	$B-$
$75 \leq \mathbf{NA} < 80$	$A-$	$55 \leq \mathbf{NA} < 60$	$C+$
$70 \leq \mathbf{NA} < 75$	$B+$	$50 \leq \mathbf{NA} < 55$	C
$65 \leq \mathbf{NA} < 70$	B	$45 \leq \mathbf{NA} < 50$	D

0.2 Deskripsi Mata Kuliah

- Deskripsi Matakuliah
  Mata kuliah Pengantar Sistem Dinamik berisi bahasan tentang persamaan dan sistem diferensial autonomus, sistem dinamik, solusi setimbang serta kestabilannya. Disamping itu berisi juga bahasan tentang bifurkasi dan jenisnya.
- Kompetensi Matakuliah
  Memahami konsep-konsep yang berkaitan dengan sistem dinamik, kestabilan dan bifurkasi serta menerapkannya pada permasalahan yang terkait
- Mata Kuliah Prasyarat : Persamaan Diferensial
- Topik Perkuliahan
  1. Pengantar Sistem Dinamik
  2. Analisis Kestabilan
  3. Bilangan Reproduksi Dasar
  4. Bifurkasi

0.3 Referensi

1. R. Kuhn, "Introduction to Dynamical Systems," London: Department of Mathematics King's College, 2005.
2. J. Hale and H. Kocak, "Dynamics and Bifurcations," New York : Springer-Verlag. 1991.
3. W. Boyce and R. C. DiPrima, "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems," New York : John Wiley & Sons, Inc, 1997.

1 Pengantar Sistem Dinamik

1.1 Pendahuluan

- Masalah Sistem dinamik sudah lama dipelajari oleh para ilmuwan seperti masalah peredaran benda-benda langit (celestial mechanics), dinamik dari cairan (fluid dynamics) dan juga osilasi dari pegas masa (nonlinear oscillations).

1.1 Pendahuluan

- Masalah Sistem dinamik sudah lama dipelajari oleh para ilmuwan seperti masalah peredaran benda-benda langit (celestial mechanics), dinamik dari cairan (fluid dynamics) dan juga osilasi dari pegas masa (nonlinear oscillations).
- Sistem dinamik mempelajari perubahan yang terjadi pada suatu sistem atau keadaan yang memenuhi kondisi tertentu seiring berubahnya waktu, apakah sistem tersebut stabil (menuju ke keadaan tertentu) ataukah tidak stabil.

1.1 Pendahuluan

- Masalah Sistem dinamik sudah lama dipelajari oleh para ilmuwan seperti masalah peredaran benda-benda langit (celestial mechanics), dinamik dari cairan (fluid dynamics) dan juga osilasi dari pegas masa (nonlinear oscillations).
- Sistem dinamik mempelajari perubahan yang terjadi pada suatu sistem atau keadaan yang memenuhi kondisi tertentu seiring berubahnya waktu, apakah sistem tersebut stabil (menuju ke keadaan tertentu) ataukah tidak stabil.
- Sistem Dinamik dibedakan menjadi 2 bagian, yaitu Sistem DInamik Kontinu dan Sistem Dinamik Diskrit.

1.1 Pendahuluan

- Masalah Sistem dinamik sudah lama dipelajari oleh para ilmuwan seperti masalah peredaran benda-benda langit (celestial mechanics), dinamik dari cairan (fluid dynamics) dan juga osilasi dari pegas masa (nonlinear oscillations).
- Sistem dinamik mempelajari perubahan yang terjadi pada suatu sistem atau keadaan yang memenuhi kondisi tertentu seiring berubahnya waktu, apakah sistem tersebut stabil (menuju ke keadaan tertentu) ataukah tidak stabil.
- Sistem Dinamik dibedakan menjadi 2 bagian, yaitu Sistem DInamik Kontinu dan Sistem Dinamik Diskrit.
  - Secara matematis, SD Kontinu dapat disimbolkan dengan, $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, sedangkan SD Diskrit disimbolkan dengan, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1.1 Pendahuluan

- Masalah Sistem dinamik sudah lama dipelajari oleh para ilmuwan seperti masalah peredaran benda-benda langit (celestial mechanics), dinamik dari cairan (fluid dynamics) dan juga osilasi dari pegas masa (nonlinear oscillations).
- Sistem dinamik mempelajari perubahan yang terjadi pada suatu sistem atau keadaan yang memenuhi kondisi tertentu seiring berubahnya waktu, apakah sistem tersebut stabil (menuju ke keadaan tertentu) ataukah tidak stabil.
- Sistem Dinamik dibedakan menjadi 2 bagian, yaitu Sistem DInamik Kontinu dan Sistem Dinamik Diskrit.
  - Secara matematis, SD Kontinu dapat disimbolkan dengan, $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, sedangkan SD Diskrit disimbolkan dengan, $x_{n+1} = f(x_n)$.
  - Perbedaan mendasar adalah keadaan sistem kontinu berupa interval, sedangkan sistem diskrit berupa jarak yang dapat dihitung.

1.2 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Definition (SPD Linear)

Pandang suatu sistem persamaan diferensial (SPD) :

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1}$$

dengan $\mathbf{x} \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dan A adalah matriks $n \times n$, disebut *SPD Linear* dan didefinisikan

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

Solusi dari sistem (1) dengan nilai awal $x(0) = x_0$ adalah $x(t) = e^{At}x_0$, e^{At} adalah matriks fungsi yang didefinisikan oleh Deret Taylor.

1.2 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Example (Sistem Linear)

1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - x_1 \end{aligned}$$

1.3 Sistem Persamaan Diferensial Tak Linear

Definition (SPD Tak Linear)

Pandang suatu sistem persamaan diferensial (SPD) :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \tag{2}$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad dan \quad f(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{bmatrix}$$

adalah fungsi taklinear dalam $x_1, x_2, \ldots, x_n$.Sistem persamaan (2) disebut sistem persamaan diferensial biasa taklinear.

1.4 Sistem Persamaan Diferensial Otonom

Definition (SPD Otonom/Mandiri)

Pandang suatu sistem persamaan diferensial (SPD) :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in R^n \tag{3}$$

dengan f merupakan fungsi kontinu bernilai real dari $\mathbf{x}$. Sistem persamaan (3) disebut sistem persamaan diferensial biasa otonom (mandiri) karena tidak memuat t secara eksplisit di dalamnya. SPD Otonom tidak secara eksplisit bergantung pada variabel independen.

1.5 Titik Ekuilibrium

Suatu sistem dinamik kontinu dikatakan memiliki titik ekuilibrium jika persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ memiliki solusi untuk $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$.

Definition (Titik Ekuilibrium)

Misal diberikan sistem persamaan diferensial mandiri

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in R^n$$

Titik $\bar{\mathbf{x}}$ yang memenuhi $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ disebut **Titik Ekuilibrium**.

Istilah Titik Ekuilibrium dapat juga disebut Titik Kesetimbangan, Titik Kritis, atau Titik Tetap. Selanjutnya akan digunakan istilah **Titik Tetap**.

1.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definition

Diberikan matriks koefisien konstan $\mathbf{A}$ berukuran $n \times n$ dan sistem persamaan diferensial biasa homogen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}, \mathbf{x} \in R^n$. Suatu vektor taknol $\mathbf{x} \in R^n$ disebut **vektor eigen** dari $\mathbf{A}$ jika untuk suatu skalar λ berlaku:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{4}$$

Nilai skalar λ dinamakan **nilai eigen** dari $\mathbf{A}$.

Untuk mencari nilai λ dari $\mathbf{A}$, maka sistem persamaan (4) dapat ditulis

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \tag{5}$$

dengan $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas. Sistem persamaan (5) mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \tag{6}$$

Persamaan (6) merupakan **persamaan karakteristik** matriks $\mathbf{A}$.

1.7 Sifat Kestabilan

Definition

Misal diberikan SPD Otonom $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n$ dan $\bar{\mathbf{x}}$ sebagai Titik Tetap. Kestabilan titik tetap $\bar{\mathbf{x}}$ dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen, yaitu $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$, yang diperoleh dari persamaan karakteristik. Secara umum, kestabilan titik tetap mempunyai perilaku sebagai berikut:

1. Stabil jika memenuhi,
   - $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, untuk setiap i.
   - Terdapat $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$, untuk sebarang j dan $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, untuk setiap $i \neq j$.
2. Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu i sehingga $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$.

1.8 Pelinearan dan Matriks Jacobian

Misal diberikan sistem persamaan diferensial biasa taklinear

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in R^n \tag{7}$$

Dengan ekspansi Taylor di sekitar titik tetap $\bar{\mathbf{x}}$, sistem persamaan (7) dapat ditulis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}) \tag{8}$$

$\mathbf{Jx}$ pada persamaan (8) disebut **Pelinearan** sistem (7) dan $\mathbf{J}$ disebut **Matriks Jacobian** *yang didefinisikan*

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

dengan $\varphi(\mathbf{x})$ suku berorde tinggi yang memenuhi $\lim_{\mathbf{x}\to 0} \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

1.9 Bidang Fase atau Medan Arah

- Misal diberikan Sistem Persamaan Diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= f(x, y) \end{aligned} \tag{9}$$

1.9 Bidang Fase atau Medan Arah

- Misal diberikan Sistem Persamaan Diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= f(x, y) \end{aligned} \tag{9}$$

- Misal terdapat sebarang titik sedemikian sehingga memenuhi

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= 0 \\ f(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

maka titik (x_0, y_0) disebut Titik tetap dari sistem (9).

1.9 Bidang Fase atau Medan Arah

- Misal diberikan Sistem Persamaan Diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= f(x,y) \end{aligned} \tag{9}$$

- Misal terdapat sebarang titik sedemikian sehingga memenuhi

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) &= 0 \\ f(x_0,y_0) &= 0 \end{aligned}$$

  maka titik (x_0, y_0) disebut Titik tetap dari sistem (9).
- Ketika solusi sistem (9) diperoleh, misalkan

$$\begin{aligned} x &= h_1(t) \\ y &= h_2(t) \end{aligned}$$

  Maka titik (x,y) dapat diplot pada bidang (x,y) yang disebut **Bidang Fase**.

1.9 Bidang Fase atau Medan Arah

Example

Misal diberikan Sistem Persamaan Diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= 4x - 2y \end{aligned}$$

1. Tentukan Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Solusi Umum.
2. Gambarkan Diagram Fase dengan menggunakan bantuan Nilai Awal masing-masing, $(x_0, y_0) = (1, 1), (1, -4)$, dan $(1, -2)$

1.9 Bidang Fase atau Medan Arah

Solution

1. *Diperoleh Nilai Eigen*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -3 \quad dan \quad \lambda_2 = 2$$

Vektor Eigen untuk $\lambda_1 = -3$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misal $u_1 = 1$, *maka* $u_2 = -4$, *sehingga diperoleh vektor eigen*

$$\mathbf{u} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

1.9 Bidang Fase atau Medan Arah

Solution

1. *Dengan cara sama, Vektor Eigen untuk* $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misal $v_1 = 1$, *maka* $v_2 = 1$, *sehingga diperoleh vektor eigen*

$$\mathbf{v} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, diperoleh Solusi Umum PD, yaitu

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

1.9 Bidang Fase atau Medan Arah

Solution

2. *Buatlah diagram Fase dengan memanfaatkan nilai awal yang tercantum pada soal.*

1.10 Latihan 1

Problem

Tentukan nilai eigen, vektor eigen dan solusi umum dari persamaan diferensial berikut. Gambarlah bidang Fase dengan menggunakan sebarang Nilai Awal.

1.
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 2y \\ \dot{y} &= 2y - x \end{aligned}$$

2.
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$