

# PENGANTAR SISTEM DINAMIK

*Semester Ganjil 2019-2020*

Resmawan

Jurusan Matematika  
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

## **3 Analisis Kestabilan Sistem Tak Linear**

## 3.1 Teknik Pelinearan Sistem

- Misal sistem tak linear pada persamaan (2) ditulis kembali dalam bentuk

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (14)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

- Pelinearan sistem pada persamaan (14) dilakukan dengan menggunakan Matriks Jacobian, mengacu pada persamaan (7) dan (8). Matriks Jacobian untuk persamaan (14) didefinisikan sebagai

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (15)$$

- Selanjutnya Titik Tetap pada sistem (14) diperoleh pada kondisi  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ .
- Sistem linear diperoleh dengan melakukan evaluasi titik tetap pada Matriks Jacobian (15).

## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Example

Lakukan analisis kestabilan pada SPD Tak Linear berikut.

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$

$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Solution

- *Menentukan Titik Tetap. Untuk  $\dot{x} = 0$  dan  $\dot{y} = 0$ , maka*

$$x(3 - x - 2y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee (3 - x - 2y) = 0$$

$$y(2 - x - y) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee (2 - x - y) = 0$$

*Sehingga diperoleh  $T_1(0, 0)$ ,  $T_2(0, 2)$ ,  $T_3(3, 0)$ , dan  $T_4(1, 1)$*

## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Solution

- *Menentukan Titik Tetap. Untuk  $\dot{x} = 0$  dan  $\dot{y} = 0$ , maka*

$$x(3 - x - 2y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee (3 - x - 2y) = 0$$

$$y(2 - x - y) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee (2 - x - y) = 0$$

*Sehingga diperoleh  $T_1(0, 0)$ ,  $T_2(0, 2)$ ,  $T_3(3, 0)$ , dan  $T_4(1, 1)$*

- *Pelinearan dengan Matriks Jacobian*

$$J = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}$$

## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Solution

- Untuk  $T_1(0,0)$  :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ , artinya  $T_1(0,0)$  simpul improper tidak stabil.

## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Solution

- Untuk  $T_1(0,0)$  :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ , artinya  $T_1(0,0)$  simpul improper tidak stabil.

- Untuk  $T_2(0,2)$  :

$$J_{(0,2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ , artinya  $T_2(0,2)$  simpul improper stabil asimtotik.



## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Solution

- Untuk  $T_3(3, 0)$  :

$$J_{(3,0)} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ , artinya  $T_3(3, 0)$  simpul improper stabil asimtotik.

## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Solution

- Untuk  $T_3(3, 0)$  :

$$J_{(3,0)} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ , artinya  $T_3(3, 0)$  simpul improper stabil asimtotik.

- Untuk  $T_4(1, 1)$  :

$$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_{12} = -1 \pm \sqrt{2}$ , artinya  $T_4(1, 1)$  sadel tidak stabil.

## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Solution

- Untuk  $T_3(3, 0)$  :

$$J_{(3,0)} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ , artinya  $T_3(3, 0)$  simpul improper stabil asimtotik.

- Untuk  $T_4(1, 1)$  :

$$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_{12} = -1 \pm \sqrt{2}$ , artinya  $T_4(1, 1)$  sadel tidak stabil.

- Selanjutnya, tentukan solusi linear di sekitar titik tetap, gambar bidang fase dan interpretasinya.

## 3.2 Beberapa Contoh Soal

### Examples

Analisis dan gambar bidang fase dari SPD

$$\begin{aligned} 1) \quad & \dot{x} = x(3 - x - y) \\ & \dot{y} = y(2 - x - y) \\ 2) \quad & \dot{x} = x(3 - 2x - 2y) \\ & \dot{y} = y(2 - x - y) \\ 3) \quad & \dot{x} = x(3 - 2x - y) \\ & \dot{y} = y(2 - x - y) \end{aligned}$$

## 3.3 Latihan 3

### Problem

Lakukan analisis kestabilan dan Gambar Bidang Fase pada SPD Tak Linear berikut:

$$1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x - xy \\ \dot{y} &= -y + xy \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -2x + 3y + xy \\ \dot{y} &= -x + y - 2xy^2 \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x + y + 2xy \\ \dot{y} &= -2x + y + y^3 \end{aligned}$$

$$4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{aligned}$$

$$5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x - y \end{aligned}$$