PEMODELAN MATEMATIKA

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

4 Pemodelan Deterministik Penyebaran Penyakit

4.1 Pendahuluan

Dari Usamah bin Zaid Radiallahu 'anhu, dari Nabi Shallallahu 'alaihi wasallam, beliau bersabda:
"Apabila tha'un (penyakit menular) mewabah di suatu negeri, maka **janganlah kalian memasukinya**. Dan apabila dia mewabah di negeri yang kalian berada di dalamnya, maka **janganlah kalian keluar darinya**" (HR. Ahmad)

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu Susceptible (S), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + I + R$

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu Susceptible (S), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + I + R$
- **Susceptible** (S) dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat tertular oleh penyakit, sehingga golongan ini memiliki kemungkinan untuk terinfeksi dan berpindah ke kelas infected (I).

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu Susceptible (S), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + I + R$
- **Susceptible** (S) dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat tertular oleh penyakit, sehingga golongan ini memiliki kemungkinan untuk terinfeksi dan berpindah ke kelas infected (I).
- **Infected** (I) merupakan individu yang dapat menularkan penyakit pada individu susceptible. Waktu yang diperlukan oleh penderita infeksi penyakit disebut periode penyakit. Setelah melalui periode penyakit, maka individu akan sembuh dan berpindah ke kelas recovered (R).

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu Susceptible (S), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + I + R$
- **Susceptible** (S) dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat tertular oleh penyakit, sehingga golongan ini memiliki kemungkinan untuk terinfeksi dan berpindah ke kelas infected (I).
- **Infected** (I) merupakan individu yang dapat menularkan penyakit pada individu susceptible. Waktu yang diperlukan oleh penderita infeksi penyakit disebut periode penyakit. Setelah melalui periode penyakit, maka individu akan sembuh dan berpindah ke kelas recovered (R).
- **Recovered** (R) merupakan individu yang telah sembuh dari penyakit atau kebal dalam kehidupannya.

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
  1. Populasi konstan

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
  1. Populasi konstan
  2. Laju kelahiran sama dengan laju kematian

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
  1. Populasi konstan
  2. Laju kelahiran sama dengan laju kematian
  3. Perubahan individu susceptible dan infected proporsional terhadap jumlah populasi.

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

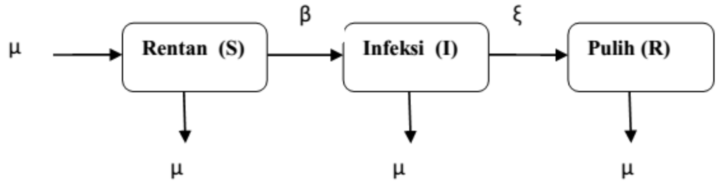
- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
  1. Populasi konstan
  2. Laju kelahiran sama dengan laju kematian
  3. Perubahan individu susceptible dan infected proporsional terhadap jumlah populasi.
  4. Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan peluang konstan sepanjang waktu.

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
  1. Populasi konstan
  2. Laju kelahiran sama dengan laju kematian
  3. Perubahan individu susceptible dan infected proporsional terhadap jumlah populasi.
  4. Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan peluang konstan sepanjang waktu.
  5. Diasumsikan juga bahwa sekali seorang individu telah terinfeksi dan kemudian telah pulih, maka individu tersebut tidak akan terjangkit kembali karena adanya kekebalan tubuh yang kuat

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
  1. Populasi konstan
  2. Laju kelahiran sama dengan laju kematian
  3. Perubahan individu susceptible dan infected proporsional terhadap jumlah populasi.
  4. Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan peluang konstan sepanjang waktu.
  5. Diasumsikan juga bahwa sekali seorang individu telah terinfeksi dan kemudian telah pulih, maka individu tersebut tidak akan terjangkit kembali karena adanya kekebalan tubuh yang kuat
- Diagran Kompartemen



4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Dengan menganggap bahwa tingkat penularan penyakit sebanding dengan jumlah pertemuan antara individu rentan dan individu yang terinfeksi, maka model *SIR* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta S\frac{I}{N} - \mu S\\ \frac{dI}{dt} &= \beta S\frac{I}{N} - \xi I - \mu I\\ \frac{dR}{dt} &= \xi I - \mu R\end{aligned}$$

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Dengan menganggap bahwa tingkat penularan penyakit sebanding dengan jumlah pertemuan antara individu rentan dan individu yang terinfeksi, maka model *SIR* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta S\frac{I}{N} - \mu S\\ \frac{dI}{dt} &= \beta S\frac{I}{N} - \xi I - \mu I\\ \frac{dR}{dt} &= \xi I - \mu R\end{aligned}$$

- Keterangan
  - N : Total populasi individu
  - S : Individu yang rentan terinfeksi penyakit
  - I : Individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh
  - R : Individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Keterangan

  β : Laju penularan penyakit

  ξ : Laju kesembuhan

  μ : Laju kelahiran dan laju kematian

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Keterangan
  β : Laju penularan penyakit
  ξ : Laju kesembuhan
  μ : Laju kelahiran dan laju kematian
- Populasi S akan meningkat seiring dengan bertambahnya individu kedalam suatu populasi dan berkurangnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh infeksi alam yang menyerang tubuh.

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Keterangan
  β : Laju penularan penyakit
  ξ : Laju kesembuhan
  μ : Laju kelahiran dan laju kematian
- Populasi S akan meningkat seiring dengan bertambahnya individu kedalam suatu populasi dan berkurangnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh infeksi alam yang menyerang tubuh.
- Populasi I akan meningkat dengan bertambahnya individu yang terinfeksi dari kelas S.

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Keterangan
  β : Laju penularan penyakit
  ξ : Laju kesembuhan
  μ : Laju kelahiran dan laju kematian
- Populasi S akan meningkat seiring dengan bertambahnya individu kedalam suatu populasi dan berkurangnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh infeksi alam yang menyerang tubuh.
- Populasi I akan meningkat dengan bertambahnya individu yang terinfeksi dari kelas S.
- Kekebalan tubuh yang terinfeksi akan berubah seiring dengan berjalannya waktu, maka individu yang terinfeksi akan pulih memasuki individu R, sehingga populasi R akan meningkat sesuai dengan meningkatnya individu yang pulih dari infeksi dan akan bekurang seiring dengan perubahan kekebalan.

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad dan \quad r = \frac{R}{N}$$

4.2 Model Deterministik Tipe SIR

- Proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad dan \quad r = \frac{R}{N}$$

- sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu - \beta si - \mu s \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - (\xi + \mu)\, i \\ \frac{dr}{dt} &= \xi i - \mu r \end{aligned}$$

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memeperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunkan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memeperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunkan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
    1. Jumlah populasi diasumsikan cukup besar

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memeperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunkan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
  1. Jumlah populasi diasumsikan cukup besar
  2. Populasi diasumsikan tertutup, oleh karena itu tidak ada populasi yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi tersebut

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memeperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunkan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
  1. Jumlah populasi diasumsikan cukup besar
  2. Populasi diasumsikan tertutup, oleh karena itu tidak ada populasi yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi tersebut
  3. Jumlah kelahiran dan kematian dalam tiap satuan waktu diasumsikan sama

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memeperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunkan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
  1. Jumlah populasi diasumsikan cukup besar
  2. Populasi diasumsikan tertutup, oleh karena itu tidak ada populasi yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi tersebut
  3. Jumlah kelahiran dan kematian dalam tiap satuan waktu diasumsikan sama
  4. Populasi diasumsikan bercampur secara homogen yang berarti setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lainya

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memeperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunkan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
    1. Jumlah populasi diasumsikan cukup besar
    2. Populasi diasumsikan tertutup, oleh karena itu tidak ada populasi yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi tersebut
    3. Jumlah kelahiran dan kematian dalam tiap satuan waktu diasumsikan sama
    4. Populasi diasumsikan bercampur secara homogen yang berarti setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lainya
    5. Individu yang terinfeksi penyakit dapat sembuh dari penyakit dan dapat pula menimbulkan kematian akibat penyakit tersebut

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:
  1. Vaksinasi hanya diberikan pada individu yang baru lahir atau yang masih dalam usia anak- anak ($<$ 12 tahun)

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

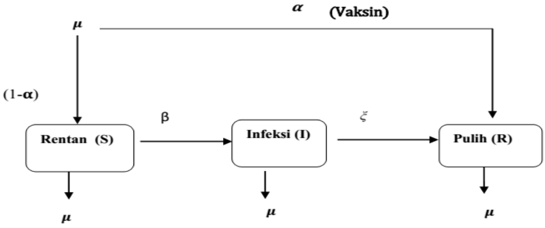
- Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:
    1. Vaksinasi hanya diberikan pada individu yang baru lahir atau yang masih dalam usia anak- anak ($<$ 12 tahun)
    2. Keampuhan vaksinasi adalah 100%, hal ini berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksinasi akan kebal dari penyakit. Kekebalan yang terjadi karena vaksinasi bersifat permanen

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:
  1. Vaksinasi hanya diberikan pada individu yang baru lahir atau yang masih dalam usia anak- anak ($<$ 12 tahun)
  2. Keampuhan vaksinasi adalah 100%, hal ini berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksinasi akan kebal dari penyakit. Kekebalan yang terjadi karena vaksinasi bersifat permanen
  3. Jumlah individu yang memperoleh vaksin proposional dengan jumlah kelahiran. Dengan demikian, jumlah individu yang kebal dari penyakit karena telah memperoleh vaksinasi dinyatakan dengan $\alpha\mu N$, α : parameter vaksinasi.

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

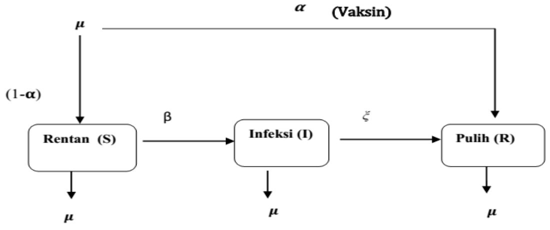
- Diagram Kompartemen



Gambar 2. Dinamika populasi dalam model SIR dengan pengaruh vaksinasi

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Diagram Kompartemen



Gambar 2. Dinamika populasi dalam model SIR dengan pengaruh vaksinasi

- Berdasarkan diagram kompartemen diperoleh model sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= (1-\alpha)\,\mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\
\frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \xi I - \mu I \\
\frac{dR}{dt} &= \alpha \mu N + \xi I - \mu R
\end{aligned}
$$

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Untuk menyerderhanakan persamaan dan memudahkan analisis model, maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad dan \quad r = \frac{R}{N}$$

4.3 Model Deterministik SIR dengan Vaksinasi

- Untuk menyerderhanakan persamaan dan memudahkan analisis model, maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad dan \quad r = \frac{R}{N}$$

- sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu(1-\alpha) - \beta si - \mu s \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - (\xi + \mu) i \\ \frac{dr}{dt} &= \alpha\mu + \xi i - \mu r \end{aligned}$$

4.3 Model Deterministik Tipe SEIR

4.4 Model Deterministik SEIR

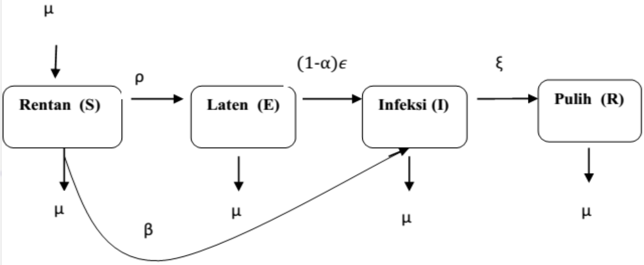
- Model ini secara umum identik dengan penurunan model SIR, hanya mengalami penambahan sebuah variabel Exposed (E), yaitu individu yang telah terpapar oleh penyakit namun belum sepenuhnya terinfeksi.

4.4 Model Deterministik SEIR

- Model ini secara umum identik dengan penurunan model SIR, hanya mengalami penambahan sebuah variabel Exposed (E), yaitu individu yang telah terpapar oleh penyakit namun belum sepenuhnya terinfeksi.
- Dalam hal ini populasi dibagi menjadi 4 kelompok, yaitu Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + E + I + R$ yang sifatnya konstan.

4.4 Model Deterministik SEIR

- Model ini secara umum identik dengan penurunan model SIR, hanya mengalami penambahan sebuah variabel Exposed (E), yaitu individu yang telah terpapar oleh penyakit namun belum sepenuhnya terinfeksi.
- Dalam hal ini populasi dibagi menjadi 4 kelompok, yaitu Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + E + I + R$ yang sifatnya konstan.
- Diagram Kompartemen



Gambar 3. Dinamika populasi dalam model SEIR .

4.4 Model Deterministik SEIR

- Berdasarkan diagram kompartemen diperoleh model sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu N - \rho S - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\
\frac{dE}{dt} &= \rho S - (1-\alpha)\beta E - \mu E \\
\frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} + (1-\alpha)\beta E - \xi I - \mu I \\
\frac{dR}{dt} &= \xi I - \mu R
\end{aligned}
$$

4.4 Model Deterministik SEIR

- Berdasarkan diagram kompartemen diperoleh model sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu N - \rho S - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\
\frac{dE}{dt} &= \rho S - (1-\alpha)\beta E - \mu E \\
\frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} + (1-\alpha)\beta E - \xi I - \mu I \\
\frac{dR}{dt} &= \xi I - \mu R
\end{aligned}$$

- Keterangan

E :	Individu laten/ terpapar
β :	Laju penularan penyakit
ξ :	Laju kesembuhan
μ :	Laju kelahiran dan laju kematian
α	Laju vaksinasi
ρ	Laju kekebalan tubuh

4.4 Model Deterministik SEIR

- Untuk menyerderhanakan persamaan dan memudahkan analisis model, maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad dan \quad r = \frac{R}{N}$$

4.4 Model Deterministik SEIR

- Untuk menyerderhanakan persamaan dan memudahkan analisis model, maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad dan \quad r = \frac{R}{N}$$

- sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \mu - \beta si - (\rho + \mu) s \\
\frac{de}{dt} &= \rho s - (1 - \alpha) \beta e - \mu e \\
\frac{di}{dt} &= (1 - \alpha) \beta e + \beta si - (\xi + \mu) i \\
\frac{dr}{dt} &= \xi i - \mu r
\end{aligned}$$

4.5 Latihan 4

Problem

1. *Buatlah modifikasi pada model klasik yang telah diberikan kemudian rumuskan model matematika hasil modifikasi yang anda berikan.*
2. *Lakukan penyederhanaan dengan proses linearisasi pada model yang anda temukan.*

"Terima Kasih, Semoga Bermanfaat"