[DAC61333] KALKULUS LANJUT
"Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih"

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

8. Metode Pengali Lagrange

8.1 Pengantar

- Pada subbab ini akan digunakan Metode Lagrange untuk menentukan nilai ekstrim fungsi dua atau tiga peubah dengan kendala tertentu.
- Pada subab sebelumnya telah dibahas beberapa contoh masalah esktrim bebas dan masalah ekstrim dengan kendala.
- Contoh terakhir yang dibahas tentang luas permukaan minimum suatu kotak adalah contoh masalah nilai ekstrim dengan kendala.
- Beberapa masalah nilai ekstrim dengan kendala antara lain:
  1. Nilai ekstrim fungsi $z = F(x, y)$ dengan kendala $g(x, y) = 0$
  2. Nilai ekstrim fungsi $w = F(x, y, z)$ dengan kendala $g(x, y, z) = 0$
- Dalam hal ini, fungsi F disebut **fungsi objektif**, sedangkan fungsi g disebut **fungsi kendala**.

8.1 Pengantar

- Pada contoh soal tentang kotak, kita ingin mencari nilai minimum dari

$$L = 2\left(xy + xz + yz\right)$$

dengan kendala $xyz = 1$. Dalam kasus ini, fungsi kendalanya adalah

$$g\left(x, y, z\right) = xyz - 1$$

- Untuk kasus ini, kita dapat mensubstitusikan $z = 1/\left(xy\right)$ pada L, sehingga L menjadi fungsi dari x dan y saja, lalu kita peroleh nilai minimum dari L dengan Uji Turunan Kedua.
- Namun pada kasus lain seringkali ditemukan persamaan kendala yang tidak mudah diselesaikan untuk satu variabel. Walaupun bisa dilakukan, tetap dapat kita gunakan metode lain yang lebih praktis, yaitu **Metode Pengali Lagrange.**

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Definition

Untuk mencari nilai ekstrim dari $F(x,y)$ dengan kendala $g(x,y) = 0$, tentukan (x,y) dan λ yang memenuhi persamaan

$$\nabla F(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \qquad dan \qquad g(x,y) = 0$$

Titik-titik (x,y) yang diperoleh merupakan titik kritis F yang memenuhi kendala $g(x,y) = 0$, dan bilangan λ disebut **Pengali Lagrange** yang bersesuaian.

Catatan:

- Metode Lagrange tidak memberikan kesimpulan apakah titik kritis tersebut titik ekstrim atau bukan. Kita perlu menggunakan argumentasi lain.
- Jika hanya terdapat satu titik kritis, kesimpulan mudah diambil. Jika lebih dari satu titik kritis, kita dapat membandingkan nilai fungsi di titik-titik tersebut.

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Example

Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari $F(x, y) = xy$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$.

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Solution

Diketahui $F(x,y) = xy$ *dan fungsi kendala* $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.
Dengan Metode Lagrange, kita cari x, y, *dan* λ *yang memenuhi*

$$\nabla F(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad \text{dan} \quad g(x,y) = 0$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y) &= (y,x) \\ \nabla g(x,y) &= (2x, 2y) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh 3 persamaan yaitu

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x \quad (1) \\ x &= 2\lambda y \quad (2) \\ x^2 + y^2 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Solution

Eliminasi λ *pada pers* (1) *dan* (2) *dengan mengalikan* x *ke* (1) *dan mengalikan* y *ke* (2),

$$\begin{aligned} xy &= 2\lambda x^2 \\ xy &= 2\lambda y^2 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$x^2 = y^2 \qquad (4)$$

Subtitusi persamaan (4) *ke persamaan* (3), *diperoleh*

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \;\; \textit{dan} \;\; y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Solution

Dengan demikian, diperoleh 4 titik kritis yaitu

$$\begin{aligned}(x,y) \;&=\; \left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \\ &\quad \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Nilai maksimum tercapat di titik $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ *dengan nilai* $F(x,y)=\frac{1}{2}$.
Nilai minimum terjadi di titik $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ *dengan nilai* $F(x,y)=-\frac{1}{2}$.

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Example

Tentukan ukuran kotak tertutup dengan volume 1 m^3 yang luas permukaannya minimum.

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Solution

Diketahui fungsi objektif dan fungsi kendala masing-masing adalah

$$\begin{aligned} L(x,y,z) &= 2(xy+xz+yz) \\ g(x,y,z) &= xyz-1 \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat ditentukan

$$\begin{aligned} \nabla L &= (2y+2z, 2x+2z, 2x+2y) \\ \nabla g &= (yz, zx, xy) \end{aligned}$$

Sehingga dengan metode lagrange, diperoleh

$$\begin{aligned} 2y+2z &= \lambda yz \\ 2x+2z &= \lambda xz \\ 2x+2y &= \lambda xy \end{aligned}$$

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Solution

Eliminasi λ*, kita dapatkan* $x = y = z$*. Substitusikan ini ke persamaan kedua, kita peroleh* $x^3 = 1$*, sehingga* $x = 1$*, yang berarti* $y = z = 1$ *juga. Dengan demikian, diperoleh titik* $(1, 1, 1)$ *yang merupakan titik minimum. Kotak tertutup volume* $1\ m^3$ *yang luas permukaannya minimum berukuran*

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Example

Tentukan titik pada bidang $x + 2y + 3z = 6$ yang terdekat dari titik asal $O(0, 0, 0)$.

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Solution

Kita akan mencari titik yang meminimumkan $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *dengan kendala* $g(x, y, z) = x + 2y + 3z - 6$.
Dengan metode Lagrange, kita peroleh 4 *persamaan berikut*

$$
\begin{aligned}
2x &= \lambda && (1)\\
y &= \lambda && (2)\\
2z &= 3\lambda && (3)\\
x + 2y + 3z &= 6 && (4)
\end{aligned}
$$

Kalikan 2 *pada persamaan* (4) *menghasilkan*

$$
\begin{aligned}
2x + 4y + 6z &= 12\\
2x + 4y + 3(2z) &= 12 && (5)
\end{aligned}
$$

8.2 Metode Pengali Lagrange dengan 1 Kendala

Solution

Subtitusi pers $(1)\ (2)\ (3)$ *ke pers* (5) *menghasilkan*

$$14\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{7}$$

Subtitusi nilai λ *ke persamaan* $(1)\ (2)\ (3)$ *menghasilkan*

$$x = \frac{3}{7},\ y = \frac{6}{7},\ z = \frac{9}{7}$$

Karena hanya 1 titik kritis, maka titik yang terdekat pada bidang $x + 2y + 3z = 6$ *dari titik asal* $O(0,0,0)$ *adalah*

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, z = \frac{9}{7}\right)$$

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Definition

Untuk mencari nilai ekstrim dari $F(x, y, z)$ dengan kendala $g(x, y, z) = 0$ dan $h(x, y, z) = 0$, selesaikan persamaan

$$\begin{aligned} \nabla F(\mathbf{p}) &= \lambda \nabla g(\mathbf{p}) + \mu \nabla h(\mathbf{p}) \\ g(\mathbf{p}) &= 0 \quad dan \quad h(\mathbf{p}) = 0 \end{aligned}$$

Titik-titik $\mathbf{p} = (x, y, z)$ yang diperoleh merupakan titik kritis F yang memenuhi kendala $g(\mathbf{p}) = 0$ dan $h(\mathbf{p}) = 0$. Bilangan λ dan μ disebut **Pengali Lagrange** yang bersesuaian.

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Example

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $F(x, y, z) = x + 2y + z$ pada kurva perpotongan tabung $x^2 + y^2 = 2$ dengan bidang $y + z = 1$.

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Solution

Diketahui fungsi kendala masing-masing adalah

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2 + y^2 - 2 \\ h(x,y,z) &= y + z - 1 \end{aligned}$$

Dengan metode Langrange $\nabla F = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$*, diperoleh 5 persamaan berikut*

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x && (1) \\ 2 &= 2\lambda y + \mu && (2) \\ 1 &= \mu && (3) \\ x^2 + y^2 &= 2 && (4) \\ y + z &= 1 && (5) \end{aligned}$$

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Solution

Subtitusi persamaan (3) *ke* (2) *diperoleh*

$$x = y \qquad (6)$$

Subtitusi persamaan (6) *ke* (4) *menghasilkan*

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 2y^2 &= 2 \Leftrightarrow y = \pm 1 \end{aligned}$$

Subtitusi $y = \pm 1$ *ke persamaan* (5) *menghasilkan*

$$z = 0 \vee z = 2$$

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Solution

Hal ini memberikan dua titik kritis berikut

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow (1,1,0) \\ x &= -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow (1,1,2) \end{aligned}$$

Subtitusi titik-titik kritis ke fungsi objektif untuk mengatahui nilai ekstrim

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (1,1,0) \Rightarrow F(x,y,z) = 3 \Rightarrow Maksimum \\ (x,y,z) &= (-1,-1,2) \Rightarrow F(x,y,z) = -1 \Rightarrow Minimum \end{aligned}$$

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Example

Tentukan titik pada garis $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ yang merupakan perpotongan bidang $x + y + z = 8$ dan $2x - y + 3z = 28$ yang terdekat dari titik asal $O(0, 0, 0)$.

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Solution

Misal

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x+y+z-8 \\ h(x,y,z) &= 2x-y+3z-28 \end{aligned}$$

Dengan metode Lagrange, diperoleh 5 persamaan

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda + 2\mu \qquad (1) \\ 2y &= \lambda - \mu \qquad (2) \\ 2z &= \lambda + 3\mu \qquad (3) \\ x+y+z &= 8 \qquad (4) \\ 2x-y+3z &= 28 \qquad (5) \end{aligned}$$

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Solution

Masing-masing persamaan (4) *dan* (5) *dikalikan* 2 *menghasilkan*

$$2x + 2y + 2z = 16 \qquad (6)$$

$$4x - 2y + 6z = 56 \qquad (7)$$

Subtitusi pers (1) (2) (3) *ke pers* (6) ,

$$3\lambda + 4\mu = 16 \qquad (8)$$

Subtitusi pers (1) (2) (3) *ke pers* (7) ,

$$\begin{aligned} 2(\lambda + 2\mu) - (\lambda - \mu) + 3(\lambda + 3\mu) &= 56 \\ 2\lambda + 7\mu &= 28 \qquad (9) \end{aligned}$$

8.3 Metode Pengali Lagrange dengan 2 Kendala

Solution

Dari pers (8) *dan* (9) , *diperoleh*

$$\underline{\begin{array}{r} 3\lambda + 4\mu = 16| \times 2 \\ 2\lambda + 7\mu = 28| \times 3 \end{array}} \Rightarrow \underline{\begin{array}{c} 6\lambda + 8\mu = 32 \\ 6\lambda + 21\mu = 84 \end{array}}_{\mu=4 \Rightarrow \lambda=0}$$

Subtitusi nilai λ *dan* μ *ke pers* (1) (2) (3) *menghasilkan nilai* $x = 4, y = -2, z = 6$. *Karena hanya satu titik kritis, maka titik terdekat adalah*

$$(x, y, z) = (4, -2, 6)$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "