ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

1.4 Subruang

1.4 Subruang

Definition (Subruang)

Misalkan V adalah ruang vektor atas skalar F dan $W \subseteq V$. W disebut sebagai **Subruang** dari V jika W juga merupakan ruang vektor atas F terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang sama dengan V.

- Berdasarkan definisi diatas, pemeriksaan W sebagai subruang dari V harus memenuhi ke 10 aksioma ruang vektor.
- Namun jika W merupakan bagian dari suatu ruang vektor V yang lebih besar, maka beberapa aksioma tidak perlu dibuktikan untuk W karena ini berlaku untuk semua vektor pada V.
- Contoh jika sifat komutatif $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ berlaku pada himpunan V, maka pembuktian sifat ini tidak perlu dilakukan terhadap W karena ini berlaku untuk semua vektor pada V. Sebagai konsekuensinya, maka sifat ini juga berlaku untuk semua vektor pada W.

1.4 Subruang

Theorem

Jika V adalah ruang vektor atas skalar F dan $W \subseteq V$, maka W disebut sebagai **Subruang** *dari V jika dan hanya jika memenuhi,*

1. $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
2. $(\forall k \in F,\ \forall \mathbf{u} \in W) \quad k\mathbf{u} \in W$

Bukti. Teorema ini dapat dengan mudah dibuktikan dengan menunjukkan aksioma-aksioma ruang vektor:

- Jika W adalah subruang dari V, maka semua aksioma ruang vektor terpenuhi termasuk $A1$ dan $A6$ yang menunjukkan teorema ini berlaku.
- Sebaliknya jika $A1$ dan $A6$ berlaku, maka cukup menunjukkan bahwa W memenuhi kedepan aksioma lainnya. Sementara $A2, A3, A7, A8, A9$ dan $A10$ secara otomatis terpenuhi oleh vektor W karena aksioma tersebut terpenuhi oleh SEMUA vektor pada W.

1.4 Subruang

Bukti. Dengan demikian hanya perlu ditunjukkan bahwa $A4$ dan $A5$ terpenuhi oleh W.
Misal sebarang vektor $\mathbf{u} \in W$. Berdasarkan syarat (2), maka $k\mathbf{u} \in W$, untuk setiap skalar k.

- Dengan mengambil $k = 0$, diperoleh $0\mathbf{u} = \mathbf{0} \in W$
- Dengan mengambil $k = -1$, diperoleh $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u} \in W$

1.4 Subruang

Examples

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa $V = R^2$ adalah ruang vektor atas R.

1. Untuk suatu $m \in R$, periksalah bahwa himpunan $W = \{(x, y) \in V | y = mx\}$ adalah subruang dari V.
2. Periksalah bahwa himpunan $W = \{(x, y) \in V | x = 0\}$ adalah subruang dari V.
3. Berikan alasan bahwa himpunan $W = \{(x, y) \in V | y = x + 1\}$ bukan subruang dari V.
4. Berikan alasan bahwa himpunan $W = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ bukan subruang dari V.

1.4 Subruang

Solution

1. *Misal* $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, *artinya* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. *Karena* V *ruang vektor, maka*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in V \end{aligned} \tag{3}$$

Disisi lain misal $y_1 = mx_1$ *dan* $y_2 = mx_2$, *maka*

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= mx_1 + mx_2 \\ &= m(x_1 + x_2) \end{aligned} \tag{4}$$

(3) *dan* (4) *menunjukkan bahwa* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.

1.4 Subruang

Solution

1. *Selanjutnya, ambil sebarang* $k \in F$ *dan* $\mathbf{u} = (x, y) \in W$*, artinya* $\mathbf{u} = (x, y) \in V$*. Karena* V *ruang vektor, maka*

$$\begin{aligned} ku &= k(x, y) \\ &= (kx, ky) \in V \end{aligned} \tag{5}$$

Disisi lain misal $y = mx$*, sehingga*

$$\begin{aligned} ky &= k(mx) \\ &= m(kx) \end{aligned} \tag{6}$$

Berdasarkan (5) *dan* (6) *disimpulkan bahwa* $k(x, y) \in W$*.*
Karena $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ *dan* $k(x, y) \in W$*, maka syarat subruang untuk* W *terpenuhi.*

1.4 Subruang

Problem

Dengan cara sama, anda dapat dengan mudah mengerjakan contoh nomor 2,3, dan 4.

Berikut ini diberikan suatu sifat (pernyataan) yang ekivalen dengan pernyataan dari suatu subruang.

Theorem

Jika V adalah ruang vektor atas skalar F dan $W \subseteq V$, maka W disebut sebagai **Subruang** *dari V jika dan hanya jika*

$$(\forall k, l \in F,\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W) \quad k\mathbf{u} + l\mathbf{v} \in W$$

1.4 Subruang

Bukti. Misalkan $k, l \in F$, dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$.

- Jika W subruang, maka

  $$k\mathbf{u} \in W \quad dan \quad l\mathbf{v} \in W$$

  Dengan demikian,

  $$k\mathbf{u} + l\mathbf{v} \in W$$

- Misalkan $k\mathbf{u} + l\mathbf{v} \in W$, $\forall k, l \in F$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$. Akan ditunjukkan bahwa W adalah ruang vektor atas F. Selanjutnya anda dapat dengan mudah menunjukkan bahwa W memenuhi ke 10 aksioma ruang vektor.

1.4 Subruang

Example

Tunjukkan bahwa himpunan

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

merupakan subruang pada ruang vektor R^3 atas R.

1.4 Subruang

Solution

Misalkan $a, b \in R$ *dan*

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 - z_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 - z_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Maka

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \underbrace{(ay_1 + by_2)}_{\in R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(az_1 + bz_2)}_{\in R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in B$$

** Latihan 2

1. Telah dibuktikan sebelumnya bahwa $V = R^2$ adalah ruang vektor atas R.
   a. Periksalah bahwa himpunan $W = \{(x, y) \in V | x = 0\}$ adalah subruang dari V.
   b. Berikan alasan bahwa himpunan $W = \{(x, y) \in V | y = x + 1\}$ bukan subruang dari V.
   c. Berikan alasan bahwa himpunan $W = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ bukan subruang dari V.
2. Misalkan ruang vektor dari semua himpunan fungsi yaitu

$$V = \{f : R \to R\}$$

dan $D \subset V$ dengan

$$D = \left\{ f \in V \,|\, \frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0 \right\}$$

Tunjukkan bahwa D adalah subruang dari vektor V.

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "