[DAC61833] ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

1.7 Basis dan Dimensi

1.7 Basis dan Dimensi

Definition

Misalkan V adalah ruang vektor atas skalar F dan $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ adalah himpunan berhingga vektor-vektor dalam V $(B \subset V)$. B dikatakan **Basis** jika dan hanya jika memenuhi dua syarat, yaitu

1. B Bebas Linear
2. B merentang V

Example

Diberikan vektor-vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ di R^3. Tentukan apakah $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ suatu basis?

1.7 Basis dan Dimensi

Solution

- *Akan ditunjukkan apakah* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *bebas linear yaitu,* $\exists k_1, k_2, k_3 \in F$ *sehingga*

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{8}$$

dengan k_1, k_2, k_3 *mempunyai solusi trivial* $(k_1 = k_2 = k_3 = 0)$. *Perhatikan bahwa dari persamaan* (8), *diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misal matriks koefisien A, *maka* $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ *Solusi Trivial* $\Rightarrow \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *bebas linear.*

1.7 Basis dan Dimensi

Solution

- *Akan ditunjukkan bahwa* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *merentang di* R^3 *yaitu* $\forall \mathbf{w} \in R^3, \exists k_1, k_2, k_3 \in F$ *sehingga*

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w} \quad (9)$$

  Telah ditunjukkan bahwa $\det(A) \neq 0$ *yang berarti bahwa sistem* (9) *konsisten, sehingga* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *merentang di* R^3
- *Dengan demikian dapat dikatakan bahwa* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *adalah basis.*

1.7 Basis dan Dimensi

Example

Tunjukkan bahwa

$$\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\right\}$$

adalah basis untuk ruang vektor $P_n\left(x\right)$

Solution

- *Akan ditunjukkan apakah* $\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\right\}$ *bebas linear yaitu,* $\exists k_0, k_1, \cdots, k_n \in F$ *sehingga*

$$k_0 1 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_n x^n = 0$$

Berdasarkan kesamaan polinomial, jelas bahwa $k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, *yang menunjukkan* $\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\right\}$ *bebas linear.*

1.7 Basis dan Dimensi

Solution

- *Selanjutnya diasumsikan terdapat* $a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in P_n(x)$, *sehingga*

$$k_0 1 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_n x^n = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

  Berdasarkan kesamaan polinomial, jelas bahwa $k_0 = a_0, k_1 = a_1, \cdots, k_n = a_n$, *yang menunjukkan* $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\}$ *merentang.*
- *Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa* $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\}$ *adalah basis, yang kemudian disebut* **Basis Standar** *untuk* $P_n(x)$.

1.7 Basis dan Dimensi

Example

Jika ruang vektor M_{22}, adalah himpunan matriks berukuran 2×2 dengan elemen di R, maka tunjukkan bahwa

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

adalah suatu basis dari M_{22}.

1.7 Basis dan Dimensi

Solution

- *Akan ditunjukkan bahwa A bebas linear*
  Misal $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$ *sehingga*

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, *sehingga A bebas linear.*

1.7 Basis dan Dimensi

Solution

- *Akan ditunjukkan bahwa A merentang*

  Misal sembarang $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{22}$, *sehingga*

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

  sehingga $x_1 = a_{11}, x_2 = a_{12}, x_3 = a_{21}, x_4 = a_{22}$ *menunjukkan bahwa A merentang.*

- *Dengan demikian A dapat dikatakan sebagai suatu basis, tepatnya basis standar untuk* M_{22}.

1.7 Basis dan Dimensi

Definition

Misal V adalah ruang vektol taknol.

- Jika V direntang oleh himpunan berhingga, maka V dikatakan **berdimensi berhingga**.
- **Dimensi** V dinotasikan $\dim(V)$ adalah banyaknya vektor pada suatu basis untuk V.
- Jika V tidak direntang oleh himpunan berhingga, maka V dikatakan **berdimensi tak hingga.**

Catatan

Ruang vektor nol dianggap sebagai ruang vektor berdimensi berhingga meskipun tidak mempunyai himpunan yang bebas linear (basisnya tidak ada), dan dimensi ruang vektor nol didefinisikan sama dengan 0.

1.7 Basis dan Dimensi

Examples

- Pada contoh sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\right\}$ adalah basis untuk $P_n(x)$, sehingga dapat dengan mudah diidentifikasi bahwa $\dim\left(P_n(x)\right) = n + 1$.
- Pada contoh sebelumnya juga telah ditunjukkan bahwa $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ adalah basis untuk ruang vektor M_{22}, yaitu himpunan matriks berukuran 2×2. Dengan demikian $\dim\left(M_{22}\right) = 2 \times 2 = 4$.
- Secara umum, basis standar untuk M_{mn} terdiri dari $m \times n$ matriks berbeda, sehingga $\dim\left(M_{mn}\right) = m \times n$.
- Dapat ditunjukkan bahwa $S = \left\{e_1, e_2, \cdots, e_n\right\}$ dengan $e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$ adalah basis standar untuk R^n,artinya $\dim\left(R^n\right) = n$.

** Latihan 5

1. Tunjukkan bahwa himpunan

$$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

dengan

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

adalah basis standar untuk R^n.

2. Tunjukan bahwa himpunan vektor berikut

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

adalah suatu basis untuk M_{22}

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "