[DAC61833] ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

3. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

3.2 Diagonalisasi

3.2 Diagonalisasi

Problem

Berikut dua masalah yang serupa, namun terlihat berbeda

1. **Masalah Vektor Eigen**
   Jika diberikan suatu matriks A, $n \times n$, *apakah terdapat sebuah basis untuk* R^n *yang terdiri dari vektor-vektor eigen matriks* A?
2. **Masalah Diagonalisasi**
   Jika diberikan suatu matriks A, $n \times n$, *apakah terdapat sebuah matriks* P *yang mempunyai invers sehingga* $P^{-1}AP$ *adalah matriks diagonal?*

3.2 Diagonalisasi

Definition

Sebuah matriks bujursangkar A dikatakan **dapat didiagonalkan** jika terdapat sebuah matriks P yang mempunyai invers sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal. Matriks P disebut **mendiagonalisasi** matriks A.

Theorem

Jika A sebuah matriks $n \times n$, maka kedua pernyataan berikut ekuivalen:

1. *A dapat didiagonalkan*
2. *A memiliki n vektor eigen yang bebas linear.*

Proof.

Prosedur pembuktian dapat dilihat di buku teks. □

3.2 Diagonalisasi

Example

Matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

dikatakan **dapat didiagonalkan** karena terdapat matiks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga diperoleh (**Buktikan**)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3.2 Diagonalisasi

Prosedur untuk Mendiagonalisasikan sebuah Matriks

1. Tentukan n vektor eigen dari matriks A yang bebas linear, misalkan
$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n$$
2. Buat sebuah matriks P dengan $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
3. Selanjutnya matriks $P^{-1}AP$ akan menjadi matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya. Dalam hal ini λ_i adalah nilai eigen yang terkait dengan $\mathbf{p}_i$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$.

3.2 Diagonalisasi

Example

Tunjukkan bahwa matriks A berikut dapat didiagonalisasi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.2 Diagonalisasi

Solution

Dari pembahasan sebelumnya diperoleh persamaan karakteristik dari matriks A,yakni

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \quad (\mathit{Tunjukkan})$$

Dari persamaan karakteristik dapat ditunjukan nilai-nilai eigen matriks A, yaitu 1 *dan* 2 *yang memberikan basis-basis untuk ruang eigen*

$$\lambda = 1, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 2, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2 Diagonalisasi

Solution

Dengan demikian diperoleh matriks P yang dapat mendiagonalisasi matriks A, yaitu

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat dibuktikan dengan melihat hasil $P^{-1}AP$ yang merupakan matriks diagonal

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Diagonalisasi

Example

Dengan cara yang sama, tunjukkan bahwa terdapat matriks P yang dapat mendiagonalkan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Example

Tunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

tidak dapat didiagonalkan

3.2 Diagonalisasi

Solution

Dari matriks A diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

yang berarti nilai-nilai eigennya adalah 1 *dan* 2. *Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa basis-basis yang bersesuaian dengan nilai eigen adalah*

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ untuk } \lambda = 1 \text{ dan } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ untuk } \lambda = 2$$

Katrena A matriks 3×3 *dan hanya terdapat 2 vektor basis, maka A tidak dapat didiagonalisasi.*

3.2 Diagonalisasi

Theorem

Jika sebuah matriks A, $n \times n$ mempunyai n nilai eigen berbeda, maka matriks A dapat didiagonalisasi.

Proof.

Perhatikan proses pembuktian di buku teks. $\square$

3.2 Diagonalisasi

Examples

Tunjukkan bahwa matriks-matriks berikut dapat didiagonalisasi

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan matriks P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ dan $P^{-1}BP$ adalah matriks diagonal.

3.2 Diagonalisasi

Solution

1. *Dari matriks A diperoleh persamaan karakteristik*

$$(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

yang berarti terdapat 3 *nilai eigen berbeda, yakni* $\lambda = 2, \lambda = -2, \lambda = 3$. *Dengan demikian A dapat didiagonalkan. Selanjutnya dapat ditunjukkan basis-basis yang bersesuaian dengan nilai eigen, yaitu*

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ untuk } \lambda = 2, \ \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ untuk } \lambda = -2 \text{ dan } \ \mathbf{p}_3 =$$

3.2 Diagonalisasi

Solution

1. *sehingga diperoleh matriks*

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

yang menghasilkan matriks diagonal

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.2 Diagonalisasi

Solution

2. *Dengan cara yang sama terhadap matriks B, anda ditugaskan untuk mengonfirmasi hasil-hasil berikut.*
   - *Nilai eigen*
     $$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \textit{dan} \quad \lambda_3 = 3$$
   - *Vektor Eigen yang bersesuaian (Matriks P)*
     $$\lambda_1 : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 : \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 : \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Diagonalisasi

Solution

2. - *Invers P*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & -5 & 5 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   - *Matriks Diagonal*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

** Latihan 9

1. Tentukan apakah matriks berikut dapat didiagonalisasi/tidak.

$$a)\ \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi A dan tentukan $P^{-1}AP$.

2. Tunjukkan bahwa matriks berikut tidak dapat didiagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

** Latihan 9

3. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa :
a) A dapat didiagonalisasi jika $(a-d)^2 + 4bc > 0$
b) A tidak dapat didiagonalisasi jika $(a-d)^2 + 4bc < 0$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "