**C. PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN**

1. Tujuan

Setelah mempelajari materi ini diharapkan peserta dapat:

1. Memahami konsep fungsi dan operasi
2. Melakukan manipulasi aljabar untuk menyederhanakan bentuk akar dan pangkat
3. Menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan linier
4. Menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat

### Uraian Materi

###  Bentuk Pangkat

Bilangan berpangkat pada mulanya digunakan dalam Matematika sebagai suatu cara ringkas untuk menuliskan perkalian yang berulang-ulang. Pada perkembangan selanjutnya, bilangan berpagkat dikembangkan untuk bilangan berpangkat bilangan bulat negatif, bilangan rasional bahkan irasional.

Untuk lebih memperjelas pemahaman tentang hal di atas, marilah kita pelajari uraian berikut ini.

**Definisi 1:**

Jika n adalah bilangan Asli dan a∈R;



**Contoh 1:**



.

Pengertian  sebagai perkalian a sebanyak k faktor tidak dapat diterapkan untuk bilangan bulat k yang negatif atau nol. Oleh karena itu untuk pangkat bilangan bulat negatif didefinisikan tersendiri.

**Definisi 2:**

Jika n adalah bilangan Asli, dan a ∈R;



Untuk 

**Contoh 2:**





**SIFAT-SIFAT PERPANGKATAN**

Jika a dan b adalah bilangan real dan m, n adalah bilangan Asli, maka berlaku:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

sebanyak m-faktor

sebanyak n-faktor

sebanyak (m+n)-faktor

**Bukti:**

1. 

 = 

 = .

1. ***Untuk m=n***



 *(karena a tidak nol)*

Jadi untuk m=n, .

***Untuk m>n***

(m-n) faktor

(m - faktor)

(n - faktor



*Untuk m<n coba sendiri!*

1. Coba sendiri!

m - faktor

m - faktor

m - faktor

1. 

 = 

 = .

1. Coba sendiri!

**Contoh 3:**

1. 33 × 34  = 37
2. 
3. 
4. 
5. 

Sifat-sifat perpangkatan di atas juga berlaku untuk pangkat bilangan real. Sifat-sifat tersebut adalah sebagai berikut.

Jika a dan b adalah bilangan real positif dan x, y adalah bilangan real, maka berlaku:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Contoh 4:**

1. 
2. 

 = 

 = 

 = .

1. 
2.  .

**Contoh 5:**

Jika x=4 dan y=, hitung 

**Jawab:**

 = 

 = 

 = 

 = 18.

**Contoh 6:**

Sederhanakan berikut ini.

1. 
2. 
3. 

**Jawab:**

1.  = 

 = 

 = 

1. = 

 = 

1.  = 

 = 

 = .

**Contoh 7:**

Sederhanakan 

**Jawab:**

= 

 

 

 .

**Contoh 8:**

Sederhanakan 

**Jawab:**



 

 

 .

**Contoh 9:**

Nyatakan  dalam bentuk yang tidak memuat pangkat negatif.

**Jawab:**

 = 

 ****

 **.**

1. **Bentuk Akar**

Kita akan mendefinisikan bentuk akar suatu bilangan dikaitkan dengan fungsi kuadrat. Kuadrat dari 2 adalah 4 dan kuadrat dari –2 juga 4. Oleh karena itu, jika ditanyakan “bilangan berapa yang kuadratnya 4?”, jawabnya adalah 2 dan –2. Perhatikan diagram berikut!

kuadratkan

Kalau relasi di atas dibalik, maka diperoleh:

kuadrat dari

Tentu relasi itu buka fungsi. Agar relasi kebalikannya merupakan fungsi, kita dapat membatasi range-nya hanya merupakan bilangan yang tidak negatif. Relasi kebalikan dengan membatasi range-nya itu kita sebut dengan bentuk akar. Jadi kita katakan “akar kuadrat dari 4 adalah 2 ***(-2 tidak termasuk***)”. Selanjutnya notasi akar pangkat dua dari suatu bilangan *a≥0* dinotasikan dengan  atau hanya ditulis . Definisi yang “analog” digunakan untuk akar pangkat *n*  (n adalah bilangan genap) dari suatu bilangan *a≥0.*  Sedangkan untuk bilangan bulat ganjil *n* tidak mempergunakan syarat a ***tidak negatif*** , karena untuk n ganjil merupakan fungsi satu-satu. Definisi tersebut diuraikan berikut ini.

**Definisi 2.1**

Misalkan *a≥0* dan *n* adalah bilangan Asli genap. Maka akar pangkat *n* dari a adalah bilangan ***tidak negatif*** b sehingga , ditulis .

**Perlu diingat:**

Khusus untuk n=2,  hanya ditulis dengan .

**Contoh 1:**

 , karena 3 tidak negatif dan kuadratnya sama dengan 9.

Walaupun kuadrat dari –3 juga 9 tetapi karena bilangan itu negatif, maka –3 tidak memenuhi.

=2, karena 2 tidak negatif dan .

Walaupun  juga 16 tetapi karena bilangan itu negatif, maka –2 tidak memenuhi.

 **tidak ada**, karena tidak ada bilangan tak negatif yang kuadratnya sama dengan –16.

 Secara umum tertuang dalam kalimat berikut ini.

**Perlu diingat:**

Akar (pangkat dua) dari suatu bilangan negatif **tidak ada**, karena tidak ada bilangan real tak negatif yang kuadratnya merupakan bilangan negatif.

**Definisi 2.2**

Misalkan *a* adalah bilangan realdan *n* adalah bilangan Asli ganjil. Maka akar pangkat *n* dari a adalah bilangan b sehingga , ditulis .

**Contoh 2:**

 = -2 karena .

= 3 karena .

= -3 karena .

***Catatan:***

Untuk  atau dan m adalah bilangan genap atau dan n adalah bilangan ganjil,

  sering kali ditulis dengan .

  sering kali ditulis dengan 

**Contoh 3:**

 dapat ditulis dengan ****

** = = = -**3.



 Dengan memperhatikan definisi 2.1 dan 2.2 di atas, maka bentuk  tidak selalu mempunyai makna. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

**Contoh 4:**

 tidak mempunyai makna (tidak ada) karena . Sedangkan  tidak ada, karena tidak ada bilangan real tak negatif yang kuadratnya sama dengan –8.

**Contoh 5:**

Jika  dan , tentukan nilai 

**Jawab:**

 = 

 

 .

**Diskusi**

Nyatakan ***benar*** atau ***salah*** untuk setiap pernyataan berikut, sertakan argumentasinya.

Jika *x, y* dan *z* adalah bilangan real, maka:

1. 
2. 

**Persamaan**

Sebelun mempelajari materi ini anda diharap telah mengingat dan memahami pengertian kalimat terbuka dan kalimat pernyataan.

Coba anda jelaskan pengertian dua istilah dan berikan beberapa contoh!

***Persamaan*** adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi “=”.

***Persamaan linier*** adalah persamaan yang variabelnya berderajad satu.

Coba anda definisikan “Persamaan kuadrat”!

Berilah beberapa contoh persamaan linier!

Berilah beberapa contoh persamaan kuadrat!

Coba jelaskan apa arti penyelesaian suatu persamaan!

Tiga hal berikut dapat kita lakukan dalam menentukan penyelesaian dari persamaan,

**a. Menambah kedua ruas dengan bilangan yang sama.**

**b. Mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama.**

**c. Membagi atau mengalikan kedua ruas dengan bilangan yang sama dan bukan nol.**

Suatu persamaan yang kedua ruasnya ditambah, dikurangi, dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama akan menghasilkan **persamaan linear yang setara (ekivalen)** dengan persamaan linear semula.

Ekuivalen artinyaadalah mempunyai penyelesaian yang sama.

Coba cari persamaan linear yang setara (ekivalen) dengan persamaan:

1. *3x* + 4 = 5 b. *5t -* 7 = 6 c. *7z = 8*

Coba selesaikan persamaan linier $3+\frac{1}{2x}<2;x\ne 0$.

**Persamaan Kuadrat**

Bentuk umum persamaan kuadrat dalam variabel $x$ adalah $ax^{2}+bx+c=0;a,b,c \in R, a\ne 0.$

Beberapa cara menyelesaikan persamaan kuadrat sebagai berikut.

* 1. **Cara Memfaktorkan**

 Contoh 1:

 $x^{2}+2x-15=0$

$$⇔\left(x+5\right)\left(x-3\right)=0$$

$⇔x=-5$ atau $x=3$.

Contoh 2:

 $2x^{2}-11x+15=0$

$$⇔\left(2x-5\right)\left(x-3\right)=0$$

$⇔x=\frac{5}{2}$ atau $x=3$.

* 1. **Cara Melengkapkan Kuadrat Sempurna**

Contoh 3:

 $x^{2}+3x-18=0$

 $⇔x^{2}+ 3x=18$

 $⇔x^{2}+ 3x+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=18+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$

 $⇔\left(x+\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{81}{4}$

 $⇔x+\frac{3}{2}=\pm \frac{9}{2}$

 $⇔x\_{1}=3, x\_{2}=-6 $

Contoh 4:

 $2x^{2}+6x+3=0$

 $⇔2x^{2}+ 6x=-3$

 $⇔x^{2}+3x=-\frac{3}{2}$

 $⇔x^{2}+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=-\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$

$$ ⇔\left(x+\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{3}{4}$$

 $⇔x+\frac{3}{2}=\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

 $⇔x\_{1}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, x\_{2}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} $.

* 1. **Cara Menggunakan Rumus**

Berikut ini diberikan penurunan rumus menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^{2}+bx+c=0;a,b,c \in R, a\ne 0$. Perhatikan dan amati setiap langkah! Adakah langkah yang salah? Jika ada jelaskan mengapa salah kemudian buatlah penurunan yang benar!

$ax^{2}+bx+c=0$. Karena $a$tidak nol,maka dapat ditulis,

⇔ 

⇔ 

⇔ 

⇔ 

⇔ 

⇔ 

Sehingga dipeloleh dua nilai $x$yaitu,

 dan 

⇔  dan 

Dengan menyederhanakan bentuk diatas, diperoleh

⇔  dan 

JIka  disingkat dengan D, maka diperoleh akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah

 

Contoh 5:

 $2x^{2}-5x-12=0$

$$x\_{1,2}=\frac{5\pm \sqrt{25-4.2(-12)}}{2.2}$$

$$ x\_{1,2}=\frac{5\pm \sqrt{121}}{4}$$

$$ x\_{1}=\frac{5+11}{4} , x\_{2}=\frac{5-11}{4} $$

$$ x\_{1}=4 , x\_{2}=-\frac{3}{2}$$

Kita ingat kembali bahwa akar-akar persamaan kuadrat $ax^{2}+bx+c=0$ adalah

$$x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

Atau dapat ditulis dengan,

$$x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}$$

Berdasarkan rumus tersebut diperoleh,

 $x\_{1}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} $dan $x\_{2}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$

Dengan demikian jumlah akar-akarnya adalah

$$x\_{1}+x\_{2}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

$$ =\frac{-b}{2a}.$$

Sedangkan hasil kali akar-akarnya adalah

$$x\_{1}.x\_{2}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} =\frac{c}{a}.$$

Coba jelaskan banyak akar persamaan kuadrat berdasarkan nilai diskriminannya!

Contoh 6:

Jika $α$ dan $β$ merupakan akar-akar persamaan $6x^{2}+5x-6=0$, tentukan nilai:

1. $α^{2}+β^{2}$
2. $α^{2}β+αβ^{2}$

Jawab:

$$a) α^{2}+β^{2}=(α+β)^{2}-2αβ$$

$$=(-\frac{5}{12})^{2}-2\left(-\frac{6}{6}\right)$$

$$=\frac{939}{432}.$$

$$b) α^{2}β+αβ^{2}=(α+β)αβ$$

$$=-\frac{5}{12}\left(-1\right)$$

$$=\frac{5}{12}.$$

**Menyusun Persamaan Kuadrat Yang Diketahui Akar-akarnya**

Jika bilangan real $p$ dan $q$ merupakan akar-akar persamaan kuadrat $ax^{2}+bx+c=0,$ maka $(x-p)$ dan $(x-q)$ merupakan faktor dari $ax^{2}+bx+c$. Dengan demikian jika $α$ dan $β$ merupakan akar-akar suatu persamaan kuadrat, maka persamaan kuadrat yang dimaksud adalah $\left(x-α\right)\left(x-β\right)=0$ atau dapat ditulis menjadi $x^{2}-\left(α+β\right)x+αβ=0$.

**Kerjakan!**

1. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah:
2. $-7$ dan $4$
3. $5$ dan $11$
4. $-\frac{2}{3}$ dan $8$
5. $\frac{1}{3}$ dan $\frac{2}{5}$
6. Jika akar-akar persamaan kuadrat $x^{2}+4x-2=0$ adalah $α$ dan $β$, tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $α^{2}β$ dan $αβ^{2}$
7. **Pertidaksamaan**

*Kalimat terbuka yang menggunakan relasi* “>”, “≥“, “<”, *atau* “≤” *disebut pertidaksamaan.*

 Berikut ini, manakah yang dapat kita lakukan untuk menyelesaikan pertidaksamaan?

* + - * 1. Menambah kedua ruas dengan bilangan yang sama
				2. Mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama
				3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan yang sama
				4. Membagi kedua ruas dengan bilangan yang sama
				5. Mengkuadratkan kedua ruas
				6. Menarik akar kedua ruas
				7. Mengalikan silang

**Diskusi**

1. Misal $a$ adalah konstanta tidak nol dan *x* adalah variabel pada bilangan real. Amati setiap langkah penyelesaian pertidaksaman  berikut ini.

 

 

 

 .

Setelah anda mengamati, adakah langkah yang salah? Jika ada, tunjukkan dan jelaskan argumentasimu!

1. Nyatakan benar atau salah pernyataan berikut ini dan kemukakan argumentasimu!
	* + 1. Jika , maka 
			2. Jika , maka 

**Pertidaksamaan Kuadrat**

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat $ax^{2}+bx+c<0$, maka langkah pertama kita selesaikan dahulu persamaan $ax^{2}+bx+c=0$. Dengan meletakkan penyelesaian itu dalam garis bilangan, selanjutnya kita tentukan daerah penyelesaian.

**Contoh 5:**

Selesaikan $x^{2}+7x+12>0$.

Jawab:

$$x^{2}+7x+12=0$$

$$⇔\left(x+4\right)\left(x+3\right)=0$$

$⇔x\_{1}=3, x\_{2}=-6 $

•

•

-6

3

+ +

* -
* -

Himpunan penyelesaian dari $x^{2}+7x+12>0$ adalah

 $\left\{x\in R:-6<x<3\right\}$.

Latihan coba tentukan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{x^{2}-4x+}{x^{2}-3x}\geq 0$.