E. TRIGONOMETRI

Tujuan mempelajari materi ini adalah agar Anda dapat:

Memahami fungsi trigonometri beserta aplikasinya, yang rinciannya adalah:

1. Memahami fungsi trigonometri dan nilainya
2. Menentukan kaitan antar fungsi trigonometri
3. Menentukan luas segitiga dengan fungsi trigonometri
4. Menentukan fungsi trigonometri untuk penjumlahan dua sudut, selisih dua sudut, dan sudut ganda
5. Mengaplikasikan fungsi trigonometri dalam kehidupan nyata

Uraian materi

Trigonometri merupakan bagian dari matematika yang diawali dengan perbandingan sisi-sisi suatu segitiga siku-siku, yang selanjutnya diperluas untuk semua sudut di semua kuadran.Pemecahan masalah atau bukti-bukti pada trigonometri dikerjakan seperti halnya pembuktian pada aljabar. Selain itu, trigonometri juga dapat digunakan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan nyata.

FUNGSI TRIGONOMETRI DAN NILAINYA

* 1. Ukuran Sudut

Berikut ini ada beberapa gambar sudut. Ukurlah besar masing-masing

sudut berikut ini dengan menggunakan busur derajat.

M

L

K

R

Q

P

A

B

C

Berapa derajatkah besar ∠ABC, ∠ PQR, dan ∠ KLM?

Ukuran sudut yang telah kita bicarakan adalah derajat yang notasinya adalah “0”.

Q

P

M

Perhatikan lingkaran di samping ini. Titik M adalah pusat lingkaran dan jari-jari lingkaran adalah *r*. Titik P dan Q adalah titik-titik pada lingkaran. Panjang busur PQ sama dengan panjang jari-jari lingkaran, atau

PQ = MR = MP= *r*.

Berapakah besar ∠PMQ?

**Ingat perbandingan yang berlaku pada lingkaran:**



Dari perbandingan tersebut didapatkan:

 

 besar ∠PMQ = 

Kalau π = 3,1459, maka besar ∠PMQ = 57,2960.

Selanjutnya besar ∠PMQ (dengan panjang busur PQ sama dengan panjang jari-jari lingkaran dan yang sama dengan 57,2960) disebut 1 radian. Jadi radian merupakan satuan sudut selain derajat.

**1 radian adalah satu satuan ukuran sudut di pusat lingkaran yang panjang busur dihadapannya sama dengan panjang jari-jari**

Didapatkan: 1 radian =  atau 2π radian = 3600 dan π radian = 1800.

**π radian =1800**

2. Sinus, Cosinus, dan Tangens Sudut Pada Segitiga Siku-Siku

Perhatikan segitiga ABC di samping.

**α**

A

C

B

Δ ABC siku-siku di B. Jika ∠BAC = α , maka

perbandingan panjang sisi BC dan sisi AC disebut sin α, dibaca sinus alpha, perbandingan panjang sisi AB dan sisi AC disebut cos α, dibaca cosinus alpha, dan perbandingan panjang sisi BC dan sisi AB disebut tan α atau tgα, dibaca tangens alpha. Atau

 **sin α** =  **cos α** = **tan α** = 

Secara umum

 **sin α = **

 **cos α = **

**tan α = **

Selain **sin α, cos α,** dan **tan α**, juga dikenal cotangens **α** (disingkat cotan**α)**, secans **α** (disingkat sec **α)**, dan cosecans**α** (disingkat cosec **α),** didefinisikan sebagai:

**cotan α = **

**sec α = **

**cosec α = **

Dari definisi tersebut Anda dapat mencari hubungan antara sin **α** dan cosec **α**, cos **α** dan sec **α**, tan **α** dan cotan **α.** Carilah hubungan tersebut!

**Latihan 1**

R

P

Q

Diketahui Δ PQR dengan

PQ = 4 cm dan QR = 3 cm.

Berapakah sin ∠ RPQ, cos ∠ RPQ, dan

tan ∠ RPQ?

**Penyelesaian**

sin ∠ RPQ = 

QR = 3 cm, tetapi panjang PR belum diketahui .

Perhatikan Δ PQR siku-siku di Q.

Dengan rumus Pythagoras didapatkan: PR2 = PQ2 + QR2. PR2 = 16 + 9 = 25

Jadi PR = √25 = 5 cm.

sin ∠ RPQ =  atau sin ∠P = 

cos ∠ RPQ =  atau cos ∠P = 

tan ∠ RPQ =  atau tan ∠P = 

Dapatkah Anda mencari hubungan antara sin ∠P dan cos ∠R, dan hubungan antara cos ∠P dan sin ∠R? Apakah yang Anda dapatkan?

***Ingat*** *apa yang disebut dengan dua sudut yang saling berpenyiku*

Bagaimanakah hubungan antara ∠P dan ∠R? Atau, berapakah ∠P + ∠R?

Atau: ∠P = 900 - ∠R atau ∠R = 900 - ∠P

Jadi: sin ∠P = cos ∠R = cos (900 - ∠P)

 cos ∠P = sin ∠R = sin (900 - ∠P)

**sin ∠P = cos (900 - ∠P)**

**cos ∠P = sin (900 - ∠P)**

Kesimpulan:

## 3. Penggunaan Perbandingan Trigonometri

Banyak sekali kegunaan konsep perbandingan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, terutama pada kasus-kasus yang melibatkan segitiga siku-siku meliputi panjang sisi dan besar sudut. Salah satu kegunaan trigonometri adalah menghitung tinggi atau jarak pada kasus terapan seperti yang akan dicontohkan berikut ini.

**Latihan 2**

Sebuah tangga disandarkan pada suatu tembok vertikal. Sudut yang dibentuk oleh tangga itu dengan lantai horizontal adalah 600. Jika jarak kaki tangga ke tembok tadi adalah 6 m, hitunglah:

1. Panjang tangga itu
2. Tinggi tembok dari ujung tangga ke lantai

B

#### A

C

600

**Penyelesaian**

Situasi contoh di atas dapat digambarkan seperti gambar di samping.

Pandang ΔABC yang terbentuk, maka ΔABC merupakan segitiga siku-siku di A. BC adalah panjang tangga dan AC adalah tinggi tembok ke lantai, sehingga :

1. menurut perbandingan cosinus :

cos 600 = = 

⇔ cos 600 . BC = 6

 ⇔ . BC = 6

 ⇔ BC = 12

Jadi panjang tangga tersebut adalah 12 m.

1. menurut perbandingan tangens:

##### tan 600 = =  ⇔ tan 600 . 6 = AC ⇔ AC =  . 6 = 6

###### Jadi panjang tembok dari ujung tangga ke lantai adalah 6 m ≈ 10,392 m.

Dari contoh ini, Anda dapat mencari tinggi menara pada **permasalahan awal.** Apakah semua unsur untuk mencari tinggi menara sudah diketahui? Anda dapat menggambar situasi tersebut seperti gambar di samping.

R

P

Q

Berapakah panjang PQ?

PQ = 505 m (mengapa?)

Ambil ∠Q **=** 550. Dengan kalkulator, Anda dapat menghitung sin ∠Q **=** sin550

Karena panjang PQ dan sin ∠Q sudah diketahui, maka dengan kalkulator Anda dapat mencari panjang PR, yaitu tinggi menara.

Selanjutnya Anda dapat mencari cos ∠Q = cos 550 dengan kalkulator.

Karena cos ∠Q dan panjang PQ sudah diketahui, maka Anda dapat menghitung panjang QR, yaitu jarak antara tempatnya orang berdiri tersebut dengan lampu.

4. Sinus, Cosinus, dan Tangens Sudut Istimewa

Sudut istimewa di sini adalah sudut-sudut yang besarnya 00, 300, 450, dan 600. Untuk mencari nilai sinus, cosinus dan tangens dari sudut-sudut istimewa di atas, marilah kita perhatikan dua segitiga siku-siku di bawah ini.

(I)

(II)

A

B

C

P

Q

R



1

1

1

2



300

600

450

450

Segitiga siku-siku yang pertama dibentuk dari segitiga sama sisi dengan panjang sisi 2 satuan, yang dipotong menurut salah satu garis sumbunya. Sedangkan siku-siku yang kedua dibentuk dari persegi dengan panjang 1 satuan, yang dipotong menurut salah satu diagonalnya. Cara menentukan nilai dari sinus, cosinus dan tangen adalah sebagai berikut.

Pada segitiga I :

sin 300 = =  ; sin 600 == = 

cos 600 =  =  ; cos 600 = = = 

tan 300 = =  = ; tan 600 == = 

Pada segitiga II:

sin 450 = == = 

cos 450 = =  = = 

tan 450 = = =  = 1

Untuk sudut nol dan siku-siku, cara memperoleh nilai sinus, cosinus dan tangen adalah sebagai berikut.

T(*x,y*)

α

Y

X

r

Misalkan diketahui lingkaran yang berpusat di (0,0) dan berjari-jari *r* satuan. Ambil sebarang titik pada lingkaran yaitu titik T (x,y).

 Pada gambar di samping akan di dapat nilai : sin *α* =  ; cos α =  ; tan *α* = 

Sudut nol terjadi jika titik T berimpit dengan sumbu X, sehingga :

 sin 00 = = 0 ; cos 00 == = 1; tan 00 = = 0.

## Sedangkan sudut siku-siku terjadi jika titik T berimpit dengan sumbu Y, sehingga: sin 900 = == 1 ; cos 900 =  = = 0 ; tan 900 = = = tak terdefinisikan (artinya tan 900 tidak mempunyai nilai).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| SUDUT | SIN | COS | TAN |
|  00 | 0 | 1 | 0 |
| 300 |  |  |   |
| 450 |  |  | 1 |
| 600 |  |  |  |
| 900 | 1 | 0 | ~ |

 Dari uraian di atas dapat dibuat tabel nilai sinus, cosinus dan tangen sebagai berikut.

**Diskusikan dengan teman Anda.**

Apakah nilai perbandingan trigonometri yang didapatkan dengan menggunakan kalkulator merupakan nilai yang sesungguhnya ataukah nilai pendekatan?

**5. Sinus, Cosinus, dan Tangens di Semua Kuadran**

Sistem kuadran pada bidang kartesius terbagi menjadi 4 bagian yang ditetapkan sebagai berikut.

Kuadran I: daerah yang dibatasi oleh sumbu X positif dan Y positif.

Kuadran II: daerah yang dibatasi oleh sumbu X negatif dan Y positif.

Kuadran III: daerah yang dibatasi oleh sumbu X negatif dan Y negatif.

Kuadran IV : daerah yang dibatasi oleh sumbu X positif dan Y negatif.

Sedangkan nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran di atas, ditetapkan seperti pada gambar berikut ini.

**Kuadran I** :

Pada kuadran I, besar sudut A lebih dari 00 dan kurang dari 900, atau

00 < A < 900.

sin A = , bernilai positif

cos A = , bernilai positif

tan A = , bernilai positif

y

x

O

r

A

I

Y

X

(x,y)

**Kuadran II** :

Pada kuadran II. besar sudut A lebih dari 900 dan kurang dari 1800, atau

 900 < A < 1800

sin A = , bernilai positif

cos A == , bernlai negatif

tan A = = , bernilai negatif

-x

y

r

X

II

A

Y

(-*x,y*)

**Kuadran III:**

Pada kuadran III. besar sudut A lebih dari 1800 dan kurang dari 2700, atau 1800 < A < 2700

O

X

III

(-x,-y)

A

Y

r

-x

-y

sin A = *-*, bernilai negatif

cos A = *-*, bernilai negatif

tan A = , bernilai positif

## Kudran IV:

Pada kuadran IV. besar sudut A lebih dari 2700 dan kurang dari 3600, atau 2700 < A < 3600

sin A = *-*, bernilai negatif

cos A = , bernilai positif

tan A =, bernilai negatif

IV

Y

A

X

(x,-y)

x

-y

r

**6. Hubungan Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-Sudut di Semua Kuadran**

Perhatikan gambar berikut.

y

*r*

P3*(-x,-y*)

P1(*x,y*)

-

x

+

x

-

y

+

P2(-*x,y*)

A

*y*

*r*

*r*

*x*

*r*

360 - A

180 + A

180 - A

P4(*x,-y*)

Di kuadran II atau sudut (1800 – A), hanya sinus yang positif.

sin (1800 – A) =  = sin A

cos (1800 – A) =  = -cos A

tan (1800 – A) =  = -tan A

Di kuadran III atau sudut (1800 + A), hanya tangen yang positif.

sin (1800 + A) = - = -sin A

cos (1800 + A) =  = -cos A

tan (1800 + A) =  = tan A

Di kuadran IV atau sudut (360 - A), hanya cosinus yang positif.

sin (3600 – A) = = -sin A

cos (3600 – A) =  = cos A

tan (3600 – A) = = -tan A

1. **Kegiatan Belajar 2 : ATURAN SINUS DAN COSINUS**

**1. Aturan Sinus**

**Mencari Rumus Sinus**

D

B

*c*

A

#### C

*a*

*b*

α

γ

β

E

Misalkan ΔABC sebarang segitiga dengan ∠CAB = *α* ; ∠ABC = *β* dan ∠BCA = *γ* serta panjang BC, AC dan AB berturut-turut adalah *a, b* dan *c*.

Tarik garis melalui titik C di luar garis AB tegak lurus garis tersebut, misal .

sin A = ⇔ CD = AC. sin A⇔ CD = *b* sin A ………(1)

sin B = ⇔ CD = BC. sin B ⇔ CD = *a* sin B……….(2)

Dari (1) dan (2) didapat:

*b* sin A *= a* sin B⇔= ……….(3)

Tarik garis melalui titik B di luar garis AC tegak lurus garis tersebut, misal .

sin A = ⇔ BE = AB. sin A ⇔ BE = *c* sin A…….(4)

sin C = ⇔ BE = BC. sin C ⇔ BE = *a* sin C…….(5)

Dari (4) dan (5) didapat:

*c* sinA = *a* sin C ⇔ = …………..(6)

Dari (3) dan (6) di dapat:

= =⇔= = ; disebut juga rumus/ aturan sinus.

 =  = 

**2. Aturan Cosinus**

**Mencari Rumus Cosinus**

C

B

*c*

A

*a*

*b*

α

γ

β

D

Misalkan ΔABC sebarang segitiga dengan ∠CAB = *α* ; ∠ABC = *β* dan ∠BCA = *γ* serta panjang BC, AC dan AB berturut-turut adalah *a, b* dan *c*.

Tarik garis melalui titik C di luar garis AB tegak lurus garis tersebut, misal .

sin A = ⇔ CD = *b*.sinA………(1)

cos A = ⇔ AD = *b*. cos A

BD = AB – AD = *c – b*. CosA………(2)

Pandang ΔBDC siku-siku di D. Berlaku teorema Phytagoras : BC2 = BD2 + CD2

*a2* = (*c – b* cos A)2 + (*b* sin A)2

 = *c2* –2*bc* cos A + *b2*cos2 A + *b2* sin2 A = *c2* –2*bc* cos A + *b2*(cos2 A + sin2 A)

 = *c2* –2*bc* cos A + *b2*(1)

*a2* = *b2* + *c2* –2*bc* cos A

Dengan cara yang sama, kita akan memperoleh rumus cosinus yang lain yaitu:

*b2 = a2 + c2* – 2 *ac* cos *α*

*c2 = a2 + b2* – 2 *ab* cos *α*

Buktikanlah rumus tersebut!

**Rumus cosinus :**

*a2 = b2 + c2* – 2 *bc* cos *α*

*b2 = a2 + c2* – 2 *ac* cos *β*

 *c2 = a2 + b2* – 2 *ab* cos *γ*

1. **Penggunaan Aturan Sinus**

Aturan sinus sangat bermanfaat untuk menghitung panjang sisi atau besar sudut pada suatu segitiga.

**Latihan 3**

1. Diketahui Δ ABC dengan AB = 4 cm, ∠CAB = 300 dan ∠BCA = 450. Tentukan panjang BC!

Penyelesaian

C

B

A

4 cm

300

450

Berdasarkan aturan sinus:

= 

  = 

. BC = 4 x 

BC = 2. Jadi, panjang BC adalah 2cm.

2. Diketahui Δ PQR dengan ∠PQR = 600 , PQ =  cm dan PR = cm. Tentukan besar sudut ∠PRQ dan ∠RPQ !

P

Q

#### R

cm

600

cm

**Penyelesaian**

Berdasarkan aturan sinus:

 = 

 = 

sin ∠PRQ =  ⇔ ∠PRQ = 450. ∠RPQ =1800-(650+450) = 700.

1. **Penggunaan Aturan Cosinus**

Seperti halnya aturan sinus, aturan cosinus sangat bermanfaat untuk menghitung panjang sisi atau besar sudut pada suatu segitiga.

**Latihan 4**

1. Diketahui Δ ABC dengan AB = 4 cm dan AC = 2 cm, ∠CAB = 300. Tentukan panjang BC!

A

B

#### C

4 cm

300

2 cm

**Penyelesaian**

Berdasarkan aturan cosinus :

*a2 = b2 + c2* – 2 *bc* cos *α*

 = (2 )2 + (4)2 – 2. 2 . 4. cos 300

 = 8 + 16 - 16 .  = 24 – 8 

*a* = = 2 

Jadi panjang BC adalah 2 cm.

b. Diketahui Δ PQR dengan PR = cm, PQ = 1 cm dan QR = 2 cm. Tentukan besar ∠PQR!

**Penyelesaian**

R

P

Q

1 cm

2 cm

  cm

PR2 = PQ2 + QR2 – 2 PQ.QR cos Q

()2 = (1)2 + (2)2 – 2. 1.2 cos Q

3 = 5 – 4 cos Q

4cos Q= 2

cos Q = 

∠PQR = 600

Jadi besar ∠PQR adalah 600.

 C. Kegiatan Belajar 3: IDENTITAS TRIGONOMETRI

Dalam aljabar, variabel dan konstanta biasanya merepresentasikan bilangan real. Nilai fungsi trigonometri juga bilangan real. Oleh karena itu, operasi di aljabar juga digunakan dalam trigonometri. Pernyataan aljabar memuat operasi penjumlahan, pengurangan, perAnda, pembagian, dan perpangkatan. Operasi-operasi tersebut digunakan untuk membentuk pernyataan trigonometri.

Suatu kesamaan antara dua pernyataan yang bernilai benar untuk semua nilai dari variabel dimana pernyataan tersebut didefinisikan disebut identitas. Suatu identitas yang memuat pernyataan trigonometri disebut identitas trigonometri.

1. **Identitas Resiprokal**

Seperti telah dijelaskan di depan, kaitan antara fungsi sin, cos, dan tan, dengan fungsi cotan, sec, dan cosec, untuk semua nilai A, kecuali untuk fungsi yang tidak terdefinisi adalah seperti berikut.

 cosec A =  sec A =  ctg A = 

 atau sin A =  cos A =  tg A = 

Identitas tersebut dinamakan identitas resiprokal.

Diskusikan

Diskusikan dengan teman Anda!

Apakah cosec A mempunyai nilai untuk A = 00 dan A = 1800? Mengapa?

Apakah sec A mempunyai nilai untuk setiap sudut A? Mengapa?

Apakah cotan A mempunyai nilai untuk setiap sudut A? Mengapa?

***Kerja Kelompok***

Kerjakanlah bersama teman Anda!

Pada sudut berapakah sec A tidak terdefinisi?

Carilah juga dimana tan A dan cotan A tidak terdefinisi!

Anda dapat menggunakan identitas resiprokal untuk mencari nilai-nilai fungsi trigonometri

1. **Identitas Hasil Bagi**

**Eksplorasi**

Perhatikan segitiga ABC berikut ini.

****

**α**

A

C

B

Apakah Anda dapat mencari hubungan antara sin, cos, dan tan?

Anda akan mendapatkan bahwa  atau sin α = tan α. cos α.

Dapatkah Anda mencari hubungan antara sin, cos, dan cotan?

Dari hubungan tersebut Anda mendapatkan identitas, yang disebut dengan identitas hasil bagi. Identitas berikut ini berlaku untuk semua nilai A kecuali untuk fungsi yang tidak terdefinisi.

 tan A =  sin A = cos A . tan A

cotan A =  cos A = sin A. cotan A

1. **Identitas Pythagoras*Eksplorasi***Kerjakanlah!Perhatikan segitiga ABC di bawah.

C

a

B

A

ABC siku-siku di B. Berapakah sin2 *α* + cos2 *α* ?Apakah kesimpulan Anda?

***Komunikasi Matematika***

Jelaskan, apakah identitas sin2 *α* + cos2 *α* = 1 berlaku juga untuk *α*> 900?

Perhatikan identitas sin2 *α* + cos2 *α* = 1, kedua ruas dibagi dengan cos2*α*, dengan cos2*α* ≠ 0

  +  = 

 tan2*α* + 1 = sec2 *α* (identitas resiprokal)

***Kerja Kelompok***

Dari identitas sin2 *α* + cos2 *α* = 1, bagilah kedua ruas dengan sin2 *α*. Apakah yang Anda dapatkan? Apakah kesimpulannya?

**Kesimpulan**

Apakah Identitas trigonometri berikut ini berlaku untuk

semua nilai *α* ?

**Identitas Pythagoras**

1. sin2 *α* + cos2 *α* = 1

2. tan2*α* + 1 = sec2 *α*

3. 1 + cotan2 *α* = cosec2 *α*

**Latihan 5**

Diketahui tg *α* =  , hitunglah cos *α.*

**Penyelesaian**

Untuk mencari cos α, terlebih dahulu dicari sec α.

 tan2*α* + 1 = sec2 *α* *identitas Pythagoras*

( )2 + 1 = sec2 *α* *tan α diganti dengan *

sec2 *α* = ,

cos *α* =  *identitas hasil bagi*

 = ±  atau kira-kira ± 0,93

1. **Identitas Simetri**

Untuk menentukan tanda nilai suatu fungsi, perlu diketahui besar sudutnya atau kuadran yang memuat letak salah satu kaki sudutnya( kaki sudut yang lain terletak pada sumbu X). Untuk menentukan nilai fungsi ini diperlukan identitas simetri dari sin *α* dan cos *α*. Untuk nilai fungsi yang lain mengikuti nilai dari sin *α* dan cos *α*.

Berikut ini adalah identitas trigonometri yang berlaku untuk sebarang bilangan bulat k dan semua nilai A.

Bagaimanakah menggambar sudut yang lebih dari 3600?

A

3600+A

x

y

**Didapatkan:**

sin (A+3600) = sin A

cos (A+3600) = cos A

**Apakah juga berlaku untuk kelipatan 3600?**

**Bentuk Umum:**

 sin (A + *k.*3600) = sin A cos (A + *k*.3600) = cos A

dengan k bilangan bulat.

**Kerjakan dengan teman Anda!**

**Untuk bilangan bulat k,**

**1. apakah berlaku tan(A+k.3600) = tan A?**

**2. apakah berlaku tan(A+k.1800) = tan A?**

**Latihan 6**

Nyatakan nilai berikut ini sebagai fungsi dari suatu sudut di kuadran I.

 a. sin 7650 b. tan 3150

**Penyelesaian**

a. 7650 = 2(3600) + 450 . Jadi sin 7650 = sin 450

b. 3150 = 3600 - 450

 tan 3150 =  =  = - tg 450

**Latihan 7**

Sederhanakanlah : sin2*x* + sin2*x* tan2*x*

**Penyelesaian**

sin2*x* + sin2*x* tan2*x* = sin2*x* ( 1 + tan2*x* ) *pemfaktoran*

 = sin2*x* sec2*x* *identitas Pythagoras*

= sin2*x*  *identitas resiprokal*

= tan2*x* *identitas hasil bagi*

**Latihan 8**

**Masalah lintasan bola**

Lintasan bola berikut rumusnya adalah h =  , Sederhanakanlah rumus tersebut.

 h = 

h

v0

θ

 h =  =  = 

Jadi rumus yang lebih sederhana adalah h = 

**D. Kegiatan Belajar 4: LUAS SEGITIGA**

**Luas suatu segitiga dapat dinyatakan dengan 2 sisi segitiga tersebut dan sudut apitnya.**

*b*

*h*

C

B

A

Misal sebuah segitiga ABC diketahui panjang sisi AC dan AB, dan besar sudut apitnya, yaitu sudut A seperti pada gambar di samping.

*a*

*c*

Misal L adalah luas segitiga ABC dan *h* adalah panjang garis tinggi

dari sudut B ke sisi AC, maka L =  *b.h*. Karena sin A =  atau h = *c* sin A, maka  **L =  bc sin A**.

Jika garis tinggi dari titik sudut A dan titik sudut C digambar, maka akan didapatkan rumus : **L =  *ab* sin C** dan **L =  *ac* sin B**.

Buktikanlah kebenaran kedua rumus luas segitiga tersebut

Secara umum luas  adalah:

 **L =  *bc* sin A**.

 **L =  *ab* sin C**

 **L =  *ac* sin B**.

**Latihan 9**

Hitunglah luas segitiga ABC dengan panjang sisi AC = 7,5 cm, BC = 9 cm, dan besar sudut C = 1000. Bulatkan hasilnya sampai persepuluhan terdekat.

*b*

*c*

*a*

1000

C

B

A

**Penyelesaian**

L =  *ab* sin C =  (7,5)(9) sin 1000 = 33,237

Jadi luas segitiga ABC kira-kira 33,2 cm2.

 **JUMLAH DUA SUDUT, SELISIH DUA SUDUT, DAN SUDUT GANDA DALAM FUNGSI TRIGONOMETRI**

* 1. **Rumus Trigonometri Untuk Jumlah Dua Sudut dan Selisih Dua Sudut.**

Misalkan a dan b adalah sudut-sudut sebarang dalam satuan radian dengan a>b. Jumlah dua sudut (a + b) dan selisih dua sudut (a – b) dapat dilukiskan secara geometri seperti gambar berikut:

a - b

a + b

a

b

b

a

Selisih dua sudut (a – b)

Jumlah dua sudut (a + b)

Jumlah dua sudut dan selisih dua sudut seperti gambar itulah yang akan kita tentukan rumus perbandingan trigonometrinya.

1. **Rumus-rumus untuk cos (a + b) dan cos (a – b)**

Gambar berikut adalah lingkaran berpusat di titik O (0,0) dengan jari-jari r, sehingga titik koordinat A adalah (r,0)

Misalkan:

**AOB** = a radian

**BOC =** b radian

**AOD =** -b radian

x

y

O

A (r,0)

B (r cos a, r sin a)

C (r cos (a + b), r sin (a + b))

D (r cos (-b), r sin (-b))

Dari gambar tersebut terlihat bahwa

**AOC** = **AOB** + **BOC** = **a + b**, sedangkan

**DOB = DOA + AOB = b + a**, sehingga **AOC** = **DOB**, Karena **AOC** = **DOB** maka Δ AOC kongruen dengan Δ BOD akibatnya AC = BD. Oleh karena itu (AC) = (BD) ............................ (\*)

Kita ingat bahwa koordinat Cartesius sebuah titik dapat dinyatakan sebagai (r cos a, r sin a), sehingga :

* Koordinat titik A adalah (r,0)
* Koordinat titik B adalah (r cos a, r sin a)
* Koordinat titik C adalah ( r cos (a + b), r sin (a + b))
* Koordinat titik D adalah (r cos (-b), r sin (-b)) = (r cos b, -r sin b)

Titik A (r,0) dan C ( r cos (a + b), r sin ( a + b))

AC = (r cos (a + b) – r) + (r sin (a + b) – 0)

= rcos(a + b) – 2rcos (a + b) + r + rsin(a + b)

= r(cos(a + b) + sin(a + b) + 1 - 2 cos (a + b))

= r (1 + 1 – 2 cos ( a + b))

= r (2 – 2 cos ( a + b))

BD = ( r cos b – r cos a ) + (-r sin b – r sin a)

= rcosb – 2rcos a cos b + rcosa + rsinb + 2rsin a sin b + rsina

= r(2 - 2 cos a cos b + 2 sin a sin b)

Dari persamaan (\*) : (AC) = (BD), maka diperoleh hubungan

r (2 – 2 cos ( a + b)) = r(2 - 2 cos a cos b + 2 sin a sin b)

Jika masing-masing ruas dibagi dengan r, diperoleh

2 – 2 cos ( a + b) = 2 - 2 cos a cos b + 2 sin a sin b

 – 2 cos ( a + b) = - 2 cos a cos b + 2 sin a sin b

Selanjutnya, jika kedua ruas dikalikan dengan (), diperoleh :

cos (a + b) = cos a cos b + sin a sin b

Jadi didapatkan rumus untuk cos (a + b), yaitu :

cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b

Catatan :



Karena sudut a dan b diambil sebarang sudut, rumus ini juga berlaku untuk sebarang sudut, baik positif maupun negatif, dalam satuan derajat maupun radian. Misalnya, jika sudut-sudutnya dinyatakan dalam satuan derajat, rumus kosinius jumlah dua sudut di atas dapat dituliskan sebagai berikut :

cos (aº + bº) = cos aº cos bº - sin aº sin bº

**Latihan 10**

* + 1. Dengan menyatakan 75º = 45º + 30º, hitunglah nilai cos 75º

Penyelesaian :

cos 75º = cos (45º + 30º)

= cos 45º cos30º - sin 45º sin 30º

=   -  = (- )

1. **Rumus untuk sin (a + b)**

sin (a + b) = cos = cos 

= cos cos b + sin sin b= sin a cos b + cos a sin b

Jadi kita memperoleh rumus untuk sin (a + b) yaitu :

**sin (a + b) = sin a cos b + cos a sin b**

Bagaimanakah rumus sin (a-b)?

**Latihan 11**

1. Dengan menyatakan 105º = 60º + 45º, tentukan nilai sin 105º

Penyelesaian :

sin 105º = sin (60º + 45º)

= sin 60º cos 45º + cos 60º sin 45º

= 

= 

1. **Rumus untuk tan (a + b)**

tan (a + b) = 

= 

Jika pembilang dan penyebut pada ruas kanan dibagi cos a cos b, diperoleh :

tan (a + b) = = 

= = 

Jadi kita memperoleh rumus tan (a + b), yaitu :

**tan (a + b) = **

 Dapat dibuktikan pula: tan (a - b) **=** 

**Latihan 12**

Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel, hitunglah tan 15º

Penyelesaian :

tan 15º = tan (45º - 30º) = 

 =  = 2 - 

1. **Rumus Trigonometri Sudut Ganda**

Untuk mencari rumus trigonometri sudut ganda, cukup menggunakan rumus trigonometri penjumlahan dua sudut.

Sin 2a = sin (a+a) = sin a. cos a + cos a. sin a = sin a.cos a + sin a.cos a

 = 2 sin a.cos a.

Dengan cara yang sama dapat dicari humus cos 2a dan tan 2a.

**tan 2a = **

**sin 2a = 2 sin a cos a**

**cos 2a = cos²a- sin²a**

**Latihan 13**

1. Diketahui a adalah sudut lancip dan sin a = , hitunglah nilai dari :
	1. sin 2a
	2. cos 2a
	3. tan 2a

Penyelesaian :

Kita gambar sudut a pada segitiga siku-siku seperti gambar di bawah dapat menggunakan *theorema Pythagoras*, panjang sisi yang belum diketahui dapat dicari yaitu 4 satuan, berarti cos a = dan tan a = 

1. sin 2a = 2 sin a cos a

3

5

a

= 2 

1. cos 2a = 

= = 

c. tan 2a = = 